Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015

Dritter Zirkelbrief: Ungleichungen

Inhaltsverzeichnis

1 **Grundlagen von Ungleichungen** 1

2 **Lösen von Ungleichungen** 3

3 **Mittel** 4

4 **Mittelungleichungen** 5

5 **Umordnungsungleichung** 6

6 **Weitere Ungleichungen** 7

7 **Aufgaben** 7

In diesem Brief geht es um Ungleichungen, insbesondere die Mittelungleichungen sowie die Umordnungsungleichung. Bevor wir aber über Beweise von Ungleichungen sprechen wollen wir die Grundlagen genauer anschauen sowie das „Lösen“ von Ungleichungen verstehen.

1 Grundlagen von Ungleichungen

Eine Ungleichung besteht genauso wie eine Gleichung aus einer linken und einer rechten Seite sowie einem Vergleichsoperator dazwischen. Hier ist dies aber nun nicht das Gleichheitszeichen „=“, sondern $<$, $>$, $\geq$ oder $\leq$. Die beiden Seiten werden miteinander verglichen und können reelle Zahlen sein oder Terme, die Variablen von reellen Zahlen beinhalten. Aber am Ende sollten da Objekte stehen, die man irgendwie „ordnen“ kann, also zum Beispiel eben reelle Zahlen.

Beispiele. Beispiele für erste Ungleichungen Es gilt $3 \geq 3$, $-2 < 5$, $-4 \leq -2$ und $x^2 \geq 0$ für alle reellen Zahlen x. Dagegen sind $7 < 7$ und $3 \geq 5$ falsch und $x^2 > x$ gilt nur für reelle x, die größer als 1 sind.

Ähnlich wie Gleichungen kann man Ungleichungen manipulieren, also zum Beispiel auf beiden Seiten den gleichen Term addieren oder abziehen. Genau wie bei Gleichungen darf man nicht mit Null multiplizieren, da diese Umformung nicht rückgängig machbar ist. Der größte Unterschied ist jedoch, dass man aufpassen muss, sobald man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert. Die folgende Tabelle fasst so ziemlich alle Rechenoperationen zusammen. Versucht doch mal, diese zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *Rechenregeln für Ungleichungen*

Im folgenden ist $n \in \mathbb{N}_+$ eine natürliche Zahl größer Null und a, b, c und d sind reelle Zahlen mit zusätzlichen Bedinungen, die in der ersten Spalte stehen. In der zweiten Spalte steht die Folgerung, allerdings fehlen die Vergleichszeichen. Deine Aufgabe ist, diese zu finden.

Voraussetzung	**Folgerung**
$a > b,\ b > c$	$a \quad c$
$a > b$	$a + c \quad b + c$
$a > b,\ c > 0$	$ac \quad bc$
$a > b,\ c > 0$	$\frac{a}{c} \quad \frac{b}{c}$
$a > b,\ c < 0$	$ac \quad bc$
$a > b,\ c < 0$	$\frac{a}{c} \quad \frac{b}{c}$
$a \geq b > 0$	$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{b}$
$a > b,\ c > d$	$a + c \quad b + d$
$a \geq b > 0,\ c \geq d > 0$	$ac \quad bd$
$a > b > 0$	$a^n \quad b^n$
$a > b \geq 0$	$\sqrt[n]{a} \quad \sqrt[n]{b}$
$1 > a \geq 0$	$\sqrt[n]{a} \quad a$
$a \geq 1$	$\sqrt[n]{a} \quad a$

Ganz ganz wichtig ist die erste Aussage: Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$. Man muss aber unbedingt beachten, dass aus $a > b$ und $b < c$ *nichts* für a und c folgt!

2 Lösen von Ungleichungen

Ähnlich wie bei Gleichungen kann man Ungleichungen mit Variablen versuchen zu lösen, also so äquivalent[1] umzuformen, dass man am Ende die Menge aller möglichen Werte für die Variablen ablesen kann, für die die Ungleichung stimmt. Solche Lösungsmengen können auch leer sein!

Beispiele. Erstes Beispiel des Lösens einer Ungleichung Was ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass $3x + 2 > 4x + 7$ gilt?

Wir können auf beiden Seiten 7 abziehen und sehen, dass $3x - 5 > 4x$ gelten muss. Nun ziehen wir auf beiden Seiten $3x$ ab und erhalten $-5 > x$. Da beide Umformungen Äquivalenzumformungen waren (man kann ja die jeweiligen Terme wieder zurückaddieren) ist die Lösungsmenge gegeben durch $\mathbb{L} = \{x \mid x < -5\}$.

Aufgabe 2.

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen und zeichne sie in die reelle Zahlengerade.

a) $2x + 5 > -x - 5$

b) $x + 5 \geq x + 7$

c) $2x + 8 \geq 2x - 3$

d) $-x \geq 2$

e) $\frac{1}{x} > \frac{2}{x+3}$

Hinweis für die Teilaufgabe e): Beachte, dass es verschiedene Fälle für das Vorzeichen von x und von $x + 3$ gibt!

Oft stößt man auf Ungleichungen zwischen Beträgen von reellen Zahlen. Der Betrag $|x|$ von $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 3.

Überzeuge dich von den folgenden Rechenregeln für Beträge von reellen Zahlen a und b:

$$\begin{aligned} |a| &= |-a|, \\ |a-b| &= |b-a|, \\ |ab| &= |a||b|, \\ \left|\frac{1}{a}\right| &= \frac{1}{|a|}. \end{aligned}$$

Gilt $|a + b| = |a| + |b|$? Wenn $a \geq b$ ist, was folgt daraus für $|a|$ und $|b|$?

[1] Äquivalent bedeutet, dass man die Umformung umkehren kann. Das heißt, dass man aus der neuen Version wieder die ursprüngliche Aussage herleiten kann.

Lass uns nun zunächst mal die folgende Ungleichung lösen

$$|x-3|<4.$$

Je nach Vorzeichen von $x-3$ erhält man verschiedene Ausdrücke. Da man hier schnell Fehler macht, führen wir einfach eine Fallunterscheidung durch. Im ersten Fall ist $x \geq 3$. Dann ist die Ungleichung äquivalent zu $x-3<4$, was uns $x<7$ gibt. Im zweiten Fall $x<3$ erhalten wir $-(x-3)<4$, also $3-x<4$ oder $x>-1$. Die Lösungsmenge ist also der Streckenabschnitt $\mathbb{L}=\{x \in \mathbb{R} | -1<x<7\}$.

Aufgabe 4.

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.

a) $|2x+1| > |x-1| + 2x - 3$

b) $\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1}$ und $x \neq -1$

3 Mittel

In diesem Kapitel werden wir vier sogenannte „Mittel“ definieren. Dies sind Funktionen, die aus (in unserem Fall) zwei Zahlen eine gemittelte Zahl machen. In der Statistik gibt es verschiedene Mittel für verschiedene Zwecke.

Definition. Das arithmetische Mittel $\mathrm{AM}(a,b)$ von den reellen Zahlen a und b ist definiert als

$$\mathrm{AM}(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

Das arithmetische Mittel ist also das ganz normale Mittel oder der ganz normale Durchschnitt von zwei Zahlen. Darüberhinaus gibt es aber zum Beispiel noch das geometrische Mittel.

Definition. Das geometrische Mittel $\mathrm{GM}(a,b)$ von den reellen Zahlen a und b ist definiert als

$$\mathrm{GM}(a,b) := \sqrt{ab}$$

Aufgabe 5.

In der folgenden Skizze siehst du einen Halbkreis, dessen Durchmesser die Länge $a+b$ hat. Wo siehst du das arithmetische Mittel und wo das geometrische Mittel in der Zeichnung? Welches Mittel scheint immer größergleich dem anderen zu sein?

Definition. Das harmonische Mittel $\mathrm{HM}(a,b)$ sowie das quadratische Mittel $\mathrm{QM}(a,b)$ der reellen Zahlen a und b sind definiert als

$$\mathrm{HM}(a,b) := \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b},$$

$$\mathrm{QM}(a,b) := \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

4 Mittelungleichungen

Satz. Die HM-GM-AM-QM-Ungleichung Für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt die folgende Ungleichung

$$\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b).$$

Beweis. Wir beweisen die Ungleichungen in der Reihenfolge ganz links, AM $\geq$ GM, GM $\geq$ HM, QM $\geq$ AM und dann die rechte Ungleichung.

(i) Da eines der a und b das kleinste oder das größte ist, gilt

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2\min(a,b)\cdot\max(a,b)}{\min(a,b)+\max(a,b)} \geq \frac{2\min(a,b)\max(a,b)}{2\max(a,b)} = \min(a,b).$$

Die Ungleichung gilt, weil ein Bruch aus positiven Zahlen kleiner wird, wenn man den Nenner größer macht.

(ii) Da Quadrate von reellen Zahlen immer positiv oder Null sind, gilt

$$\begin{aligned}(a-b)^2 \geq 0 &\implies a^2+b^2-2ab \geq 0\\ &\implies a^2+2ab+b^2 \geq 4ab\\ &\implies (a+b)^2 \geq 4ab\\ &\implies a+b \geq 2\sqrt{ab}\\ &\implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\end{aligned}$$

Beachte, dass a und b nicht-negativ sind, weshalb wir die Wurzel so ziehen dürfen.

(iii) Hier benutzen wir die eben bewiesene Ungleichung.

$$\begin{aligned}&\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\\ \implies &\sqrt{ab}(a+b) \geq 2ab\\ \implies &\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}\end{aligned}$$

(iv) Wie vorhin gilt für alle rellen Zahlen a, b, dass $(a-b)^2 \geq 0$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}&a^2+b^2-2ab \geq 0\\ \implies &2a^2+2b^2 \geq 2ab+a^2+b^2\\ \implies &2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2\\ \implies &\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}\\ \implies &\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

(v) Ähnlich wie am Anfang müssen wir hier nur bemerken, dass eines der a und b das größte und das andere das kleinste Element ist. Dann erhält man

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{\min(a,b)^2+\max(a,b)^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{2\max(a,b)^2}{2}} = \max(a,b)$$

□

Aufgabe 6.

Überlege dir einen Beweis der Mittelungleichung anhand der geometrischen Interpretation von Aufgabe 5 sowie dem folgenden Bild. Dies wird ein „Beweis ohne Worte".

5 Umordnungsungleichung

Seien $a_1, \dots, a_n$ sowie $b_1, \dots, b_n$ Folgen von positiven reellen Zahlen. Dann gilt

Satz. Umordnungsungleichung Die Größe $S = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ ist maximal, wenn $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_n)$ gleich geordnet sind.[2] S ist minimal, wenn die zwei Folgen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis. Sei $(c_1, \dots, c_n)$ eine Permutation[3] von $(b_1, \dots, b_n)$ und sei o.B.d.A.[4] $a_r > a_s$. Dann können wir betrachten

$$\begin{aligned} S &= a_1c_1 + \cdots + a_rc_r + \cdots + a_sc_s + \cdots + a_nc_n, \\ S' &= a_1c_1 + \cdots + a_rc_s + \cdots + a_sc_r + \cdots + a_nc_n. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$S' - S = a_rc_s + a_sc_r - a_rc_r - a_sc_s = \underbrace{(a_r - a_s)}_{>0}(c_s - c_r),$$

woraus folgt, dass $c_s > c_r \implies S' > S$ sowie $c_s < c_r \implies S > S'$. Jetzt schauen wir uns an, was diese Rechnunge bedeuten. Angenommen, die a-Folge war absteigend sortiert, also $r < s$ und $a_r - a_s > 0$. Dann sehen wir, dass die bezüglich r und s genauso absteigend sortierte b-Folge mit $c_r - c_s > 0$ ergibt, dass $S' - S < 0$ gilt und damit $S' < S$. Das heißt, dass die Folge, wo wir c_s und c_r vertauschen (deren Summe wir mit S' bezeichnen), die Summe S' *kleiner* macht. Analog sieht man, dass wenn die b-Folge nicht genauso wie die a-Folge sortiert ist, aus $c_r - c_s < 0$ folgt $S' - S > 0$ und damit, dass die umgedrehte Folge die größere Summe S' liefert. Außerdem folgen alle Gleichheitsfälle und anderen Sortierungen für die a-Folge mit genau den gleichen Argumenten. □

[2] Gleichgeordnet bedeutet hier, dass entweder beide Folgen absteigend oder beide Folgen austeigend geordnet sind.

[3] Eine *Permutation* ist eine Umordnung der Elemente. Das heißt hier, dass die jedes c_i gleich einem b_j ist, so, dass alle b's genau einmal bei den c's vorkommen.

[4] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Dies bedeutet, dass wir eine Annahme treffen, ohne, dass diese die Gesamtaussage beeinträchtigen würde. Hier wählen wir einfach zwei Indizes r und s, so dass $a_r > a_s$ gilt.

Aufgabe 7. *Erstes Beispiel*

Beweise für $a, b, c \geq 0$ gilt $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

Aufgabe 8. *Drei Folgen*

Beweise $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$ für $a.b.c \geq 0$.

Aufgabe 9. *Weiteres Beispiel*

Beweise $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ für $a, b, c > 0$.

Aufgabe 10. *Chebyshevs Ungleichung*

Beweise *Chebyshevs Ungleichung*[5] für gleich geordnete Folgen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ von nichtnegativen reellen Zahleen

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

Aufgabe 11. *Nesbitts Ungleichung*

Beweise *Nesbitts Ungleichung*[6] für $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 12. *Allgemeine Mittelungleichungen*

Beweise die allgemein AM–GM-Ungleichung für n reelle Zahlen $x_1, \ldots, X_n > 0$ aus der Umordnungsungleichung

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

6 Weitere Ungleichungen

7 Aufgaben