Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015

Dritter Zirkelbrief: Set

Inhaltsverzeichnis

In diesem Brief geht es um die mathematische Analyse eines (zumindest bei Mathematikern) sehr beliebten und oft gespielten Gesellschaftsspiels namens SET. Falls ihr es noch nicht kennt, könnt ihr gerne nach einer kostenlosen Version zum Ausdrucken im Internet suchen, um dieses erstmal selbst zu spielen. Keine Sorge, wir erklären die Regeln im ersten Abschnitt und schauen uns auch ein paar Beispiele an, bevor wir in die Mathematik einsteigen. Übrigens nennt man diesen Bereich der Kombinatorik auch Ramsey-Theorie und es ist ein immer noch aktives Forschungsgebiet!

1 Erklärung Set

Bei Set sitzen eine beliebige Anzahl Spieler vor einem typischerweise 4×4-Rechteck aus Karten. Diese Karten wurden zufällig gezogen und sind für alle sichtbar. Nun müssen die Spieler ein sogenanntes Set finden (was wir gleich erklären) und sobald sie eines sehen, laut „Set“ ausrufen. Daraufhin zeigt der jenige Spieler das Set und nimmt die Karten zu sich als Punkt. Dann werden diese drei Karten durch neue ersetzt und es dürfen wieder alle gleichzeitig suchen. Wenn man sich getäuscht hat und eigentlich doch kein Set vorlag oder man es nicht mehr findet, kann man je nach Spielregeln bestraft werden indem man bis zum nächsten Set nicht mehr „Set“ sagen darf. Wenn sich alle Spieler einig sind, dass kein Set existiert, werden drei neue Karten offen dazugelegt. Das Spiel endet, wenn der Nachziehstapel alle ist und alle Spieler der Meinung sind, dass die verbleibenden Karten kein Set mehr beinhalten.

Aber jetzt kommt die wichtigste Frage: Was ist eigentlich ein Set?

Dazu beschreiben wir kurz die Spielkarten selber. Diese bestehen aus Symbolen mit vier Eigenschaften: **Anzahl** der Symbole, **Form** der Symbole, **Farbe** der Symbole und **Füllung** der Symbole. Von jeder Eigenschaft gibt es drei Versionen, es kann eins, zwei oder drei Symbole geben, diese können Schlangen, Rauten oder Ovale sein, sie können grün, rot oder lila sein und sie sind entweder leer, schraffiert oder gefüllt. Das heißt es gibt $3^4 = 81$ verschiedene Karten und tatsächlich ist jede davon genau einmal im Spiel enthalten.

Setkarten

Ein Set besteht nun aus drei Karten, die die folgende Eigenschaft haben: *Für jede Eigenschaft gilt, dass sie auf allen drei Karten entweder überall verschieden oder überall gleich ist.*

Alles klar? Wenn ihr das zum ersten Mal seht, geht es euch vermutlich genauso wie allen anderen: Ihr seid verwirrt. Deswegen schauen wir uns einmal ein paar Beispiele für Sets und Nicht-Sets an.

Beispiele für Sets und Nichtsets

So, nach diesen ganzen Beispielen wollen wir noch kurz ein kleine Aufgabe stellen.

Aufgabe 1.

Angenommen, es sind zwei verschiedene Karten gegeben. Gibt es dann immer eine dritte Karte, so dass diese drei ein Set bilden? Wenn ja, ist diese Karte eindeutig oder gibt es mehrere Möglichkeiten?

2 Übersetzung in analytische Geometrie

Um das Spiel Set zu analysieren, werden wir die Set-Bedingung als geometrische Bedingung (und zwar die einer Geraden) in einem Vektorraum schreiben. Sobald wir verstanden haben, dass diese Beschreibung äquivalent zum Spiel ist, können wir dann über Geraden im $\mathbb{F}_3^4$ reden.

Bevor wir diese Wörter erklären, wollen wir noch kurz darüber sprechen, was für Fragen wir uns eigentlich über Set stellen können. Wir wissen bereits, dass es 81 Kombinationen gibt und dass zwei Karten die dritte für ein Set eindeutig festlegen. Desweiteren können wir uns fragen, wieviele Karten eigentlich nötig sind, damit darunter sicher ein Set ist. Wenn ihr das Spiel schon gespielt habt, werden ihr nämlich sehen, dass unter den anfänglichen 16 Karten nicht immer ein Set ist. Außerdem könnten wir uns fragen, wenn ich n Karten zufällig ziehe, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich darunter ein Set befindet. Diese wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragen sind sehr interessant, aber wir können diese aus Platzgründen in diesem Brief nicht angehen. Daher konzentrieren wir uns auf die Frage:

> Wieviele Karten benötigt man mindestens, damit sich darunter mit Sicherheit ein Set befindet?

Als erstes benötigen wir den Begriff eines Vektorraums über einem endlichen Körper. (Mathematische) Körper sind Mengen, mit denen man addieren und multiplizieren kann, sodass alle üblichen Rechenregeln gelten:

- Die Multiplikation und Addition sind assoziativ.
- Die Multiplikation und Addition sind kommutativ.
- Es gelten die Distributivgesetze.
- Es gibt ein Element Null, geschrieben 0, so dass für alle Elemente a des Körpers $a + 0 = a$ gilt.
- Es gibt ein Element Eins, geschrieben 1, so dass für alle Elemente a des Körpers $a \cdot 1 = a$ gilt.
- Für alle Elemente a im Körper gibt es das negative Element, geschrieben $-a$ für welches $a + (-a) = 0$ gilt.
- Für alle Elemente a außer der Null gibt es ein inverses Element, geschrieben a^{-1} oder $\frac{1}{a}$, für welches $a \cdot a^{-1} = 1$ gilt.

Insbesondere sind also die rationalen Zahlen oder die reellen Zahlen Körper. Wir interessieren uns aber für *endliche* Körper, also solche Körper, die nur endlich viele Elemente beinhalten. Das für uns interessanteste Beispiel ist der $\mathbb{F}_3$, dieser besteht aus den Elementen $\{0, 1, 2\}$, die Addition ist die übliche Addition von natürlichen Zahlen, allerdings modulo 3, das heißt, dass man immer nur den Rest bei Division durch drei sich merkt. Zum Beispiel ist $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 0$ und $2 + 2 = 1$. Die Multiplikation ist analog die übliche Multiplikation modulo drei, das heißt ihr multipliziert und nehmt dann den Rest bei Division durch drei. Es gilt also zum Beispiel $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 1$ und $0 \cdot 2 = 0$.

Aufgabe 2.

Überlegt euch, dass der $\mathbb{F}_3$ mit den gerade beschriebenen Operationen ein Körper ist.[1]

Ein *Vektorraum* über dem $\mathbb{F}_3$ ist nun genauso wie in der Schule die Menge von Spaltenvektoren bestimmter Länge mit Einträgen im $\mathbb{F}_3$. Ihr könnt diese Vektoren addieren, indem ihr die Einträge als Zahlen im $\mathbb{F}_3$ addiert und ihr könnt solche Spaltenvektoren mit Zahlen aus dem $\mathbb{F}_3$ multiplizieren, indem ihr alle Einträge mit der Zahl im $\mathbb{F}_3$ multipliziert. Die Anzahl der Einträge im Vektor nennt man *Dimension* des Vektorraums. Mit $\mathbb{F}_3^4$ bezeichnet man also den vierdimensionalen[2] Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_3$. Einige Beispielobjekte und Rechnungen in diesem Vektorraum sind also

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix},\\
2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Wieviele Vektoren gibt es im $\mathbb{F}_3^4$?

[1] Auch wenn das verwirrend ist, bitte beachtet, dass im $\mathbb{F}_3$ die Gleichung $1 + 2 = 0$ gilt. Also ist $-1 = 2$, was wir später zum Rechnen auch so benutzen werden.

[2] Aus der Schule kennt ihr zwei- und dreidimensionale Vektoren, die man sich sehr gut bildlich als Pfeile in der Ebene oder im Raum vorstellen kann. Höhere Dimensionen gibt es auch, dies sind einfach Vektoren mit mehr Einträgen. Zwar kann man sich diese nicht mehr vorstellen, aber alle Rechenregeln gelten immer noch genauso und das reicht, um damit Mathematik betreiben zu können.

Für später wollen wir folgendes bemerken: Eine Summe von Zahlen im $\mathbb{F}_3$ wird genau dann Null, wenn sie durch drei teilbar ist. Das ist deshalb wichtig, weil wir im folgenden sehen wollen, was Sets damit zu tun haben.

Nun wollen wir uns überlegen, was ein Set in dieser Sprache ist. Eine Karte entspricht einem Element im F_3^4, indem wir jeden Eintrag als Information über eine jeweilige Eigenschaft interpretieren. Zum Beispiel könnte in $(0, 2, 1, 0)$ die erste Zahl die Anzahl der Symbole, die zweite die Form, die dritte die Farbe und die vierte die Füllung beschreiben und die 0, 1 und 2 bezeichnet jeweils eine der drei Möglichkeiten. Dabei kommt es auch gar nicht darauf an, wie wir dies genau identifizieren. Ein Set besteht nun aus drei Karten, also drei Vektoren im $\mathbb{F}_3^4$, zum Beispiel a, b und c.[3] Jetzt machen wir folgende Beobachtung:

Satz 2.1. *Die drei „Karten" a, b und c bilden ein Set genau dann, wenn im* $\mathbb{F}_3^4$ *die Gleichung* $a + b + c = 0$ *gilt.*[4]

Beweis. Wir schreiben $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ für den Vektor $a \in \mathbb{F}_3^4$, der die Karte a beschreibt. Analog bezeichnen wir die Komponenten bzw. Einträge von b und c mit b_i und c_i für $i = 1, \ldots, 4$.

Angenommen, a, b und c bilden ein Set. Dann gilt für jede Zeile i, dass alle drei Einträge der Vektoren identisch sind oder alle drei paarweise verschieden. Im ersten Fall gilt jeweils für jede Komponente immer $3 \mid 3 \cdot a_i$ und im zweiten Fall $3 \mid 3 = 0 + 1 + 2$, also ist jede Komponente von $a + b + c$ gleich Null und damit $a + b + c = 0$.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $a + b + c = 0$ gilt. Das heißt, dass für die i-te Zeile $a_i + b_i + c_i = 0$ gilt und dies bedeutet, dass $a_i + b_i + c_i$ durch 3 teilbar ist. Nun können wir einfach in einer Tabelle alle Möglichkeiten für die Reste durchgehen und stellen fest, dass immer wenn man 0 für die Summe erhält, dies dem Fall eines Sets entspricht. Hier ist nur der Anfang abgedruckt, bitte überlegt euch die restlichen Fälle.

[3] Übrigens schreibt man in der Mathematik Vektoren typischerweise *ohne* den Pfeil darüber. Stattdessen geht immer aus dem Kontext hervor, ob die Objekte Zahlen oder Vektoren sind. Bitte diskutiert nicht darüber in der Schule, dort hat sich die Schreibweise mit Pfeilen durchgesetzt. Akzeptiert das bitte einfach. :-)

[4] In der Mathematik ist es üblich, den Nullvektor auch mit 0 zu bezeichnen. Aus dem Kontext sollte immer hervorgehen, ob man die Zahl 0 oder den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ meint.

a_i	b_i	c_i	$a_i + b_i + c_i$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	0	2	2
0	1	0	1
0	1	1	2
0	1	2	0
	$\vdots$		

$\square$

Aufgabe 4.

Vervollständigt die Tabelle im Beweis des letzten Satzes.

Wir wissen nun also, dass Sets das gleiche sind wie Mengen von drei Vektoren a, b, c im $\mathbb{F}_3^4$, die $a + b + c = 0$ erfüllen. Was sind solche Punkte nun geometrisch gesehen?

Die Antwort ist erstaunlich einfach, dies sind *Geraden* im $\mathbb{F}_3^4$. Eine Gerade in einem Vektorraum ist eine Menge von Punkten, so dass Differenzvektoren von je zwei Vektoren parallel sind, also skalare Vielfache von einander sind. Anschaulich bedeutet das, dass die Richtungen zwischen je zwei Punkten auf der Gerade eben genau in eine Richtung zeigen beziehungsweise parallel sind. Weil das komplizierter klingt als es ist, gibt es hier eine erklärende Skizze.

Gerade in einem reellen Vektorraum

Satz 2.2. *Drei paarweise verschiedene Vektoren a, b und c im $\mathbb{F}_3^4$ liegen auf einer Gerade, genau dann wenn sie $a + b + c = 0$ erfüllen. Desweiteren hat jede Gerade drei Punkte. Außerdem definieren je zwei verschiedene Punkte eine eindeutige Gerade.*

Beweis. Angenommen a, b und c liegen auf einer Geraden. Dann gilt $b - a = \lambda(c - a)$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{F}_3$, weil die Differenzenvektoren parallel sein müssen. Allerdings kann λ nicht null sein, weil sonst $b = a$ wäre und nicht eins sein, weil sonst $b = c$ wäre, also ist $\lambda = 2$. Dann kann man die Gleichung aber umschreiben zu $a + b + c = 3c = 0$.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $a+b+c=0$ ist und dass die drei Vektoren paarweise verschieden sind. Dann gilt $b-a=-c-2a=-c+a=-(c-a)=2(c-a)$ weshalb die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Es liegen mindestens drei Punkte auf einer Geraden, denn wenn man zwei verschiedene Punkte a und b auf dieser hat, liegt auch $a+2(b-a)=2b-a$ auf der Gerade und es gilt $2b-a\neq a,b$, denn sonst wäre $a=b$.

Es liegen maximal drei Punkte auf einer Geraden, denn angenommen es gäbe vier paarweise verschiedene Punkte a,b,c und d auf der Geraden. Dann gäbe es Zahlen μ und ν im $\mathbb{F}_3$, so dass $b-a=\mu(c-a)=\nu(d-a)$. Wie vorhin folgt aus der paarweisen Verschiedenheit $\mu=\nu=2$ und damit $c=d$, was der Annahme widerspricht.

Gegeben zwei Vektoren a und b im $\mathbb{F}_3^4$ gibt es einen eindeutigen Vektor c, so dass $a+b+c=0$ gilt, denn $c=-a-b$ legt diesen eindeutig fest. Also gibt es wie wir es gewohnt sind, durch je zwei verschiedene Punkte eine eindeutige Gerade. $\square$

Komische Gerade im $\mathbb{F}_3^3$

Bevor wir uns in die Kombinatorik stürzen, wollen wir nun unsere ursprüngliche Frage an das Setspiel in eine geometrische Frage umformulieren. Aus der Frage „Wieviele Karten benötige ich mindestens, damit sicher ein Set darunter ist?“ wird nun die Frage „Wieviele Punkte im $\mathbb{F}_3^4$ muss ich mindestens wählen, damit sicher drei Punkte davon auf einer Geraden liegen?“ oder alternativ „Wieviele Punkte kann ich im $\mathbb{F}_3^4$ höchstens wählen, ohne dass drei Punkte davon auf einer Geraden liegen?“.

3 Analyse in verschiedenen Dimensionen

Wir werden uns der Frage aus dem vorherigen Abschnitt langsam nähern, indem wir am Anfang das Setspiel mit nur zwei Eigenschaften statt vier und danach mit drei und dann mit vier betrachten. Dies entspricht geometrisch dem Suchen von Geraden im $\mathbb{F}_3^2$ und $\mathbb{F}_3^3$, das heißt die Vektoren haben zunächst nur zwei oder drei Einträge.

3.1 Dimension 2

Schauen wir uns also mal den $\mathbb{F}_3^2$ an. Dieser besteht aus 9 Punkten, die auf einem 3×3-Gitter liegen. Es ist wichtig zu verstehen, dass Geraden in diesem Vektorraum nicht nur die offensichtlichen Diagonalen sind, sondern auch die „Nebendiagonalen“ wie im folgenden Bild zu sehen.

Komische Gerade im $\mathbb{F}_3^2$

Als erstes fragen wir uns, wieviele Geraden durch einen gegebenen Punkt gehen. Es ist dabei egal welchen Punkt wir dafür hernehmen, weil „jeder Punkt in einem Vektorraum gleich aussieht“. Der mittlere Punkt $(1,1)$ hat 4 Geraden, nämlich die Diagonalen sowie die vertikale und die horizontale Richtung. Wenn wir also diese Anzahl mit der Anzahl an Punkten multiplizieren haben wir jede Gerade so oft gezählt wie sie Punkte beinhatet.[5] Es gibt also $\frac{4 \cdot 9}{3} = 12$ Geraden im $\mathbb{F}_3^2$.

Um jetzt auszurechnen wieviele Punkte wir in der Ebene $\mathbb{F}_3^2$ maximal auswählen können, so dass sich darunter *keine* drei Punkte auf einer Geraden befinden gehen wir wie folgt vor. Als erstes versuchen wir diese maximale Zahl N zu finden. Sobald wir eine Vermutung für N haben, beweisen wir dass sich unter $N+1$ Punkten mindestens eine Gerade befindet. Das werden wir tun, indem wir die Ebene geschickt in niedriger dimensionale (hier Geraden) Untervektorräume zerlegen und dann das Schubfachprinzip anwenden.

Aufgabe 5.

Wieviele Punkte kannst du maximal in der Ebene $\mathbb{F}_3^2$ wählen, ohne dass sich eine Gerade darunter befindet? Bedenke dabei, dass es „komische“ Geraden auf den Nebendiagonalen gibt.

Vermutlich hast du es auch geschafft, vier Punkte unterzukriegen, aber keine fünf. Daher beweisen wir jetzt den folgenden Satz.

Satz 3.1. *Unter fünf Punkten im $\mathbb{F}_3^2$ befindet sich immer mindestens eine Gerade.*

Beweis. Stell dir die Ebene bestehend aus drei horizontalen Geraden vor. Wenn wir fünf Punkte auf diese drei Geraden verteilen, muss es eine Gerade geben, wo sich nur ein Punkt befindet, denn sonst müsste eine der anderen beiden Geraden drei Punkte haben und wir währen fertig. Bezeichne diese Gerade mit l.

[5] Diese Technik nennt man doppeltes Abzählen und ist super wichtig und mächtig in der Kombinatorik.

Den gewählten Punkt auf dieser Geraden bezeichnen wir mit x. Durch x gehen vier Geraden, eine davon ist l. Alle Punkte in $\mathbb{F}_3^2$ liegen auf einer Geraden durch x, weil ja zwei Punkte immer eindeutig eine Gerade definieren. Das heißt, wir müssen noch die restlichen vier Punkte auf die restlichen drei Geraden durch x verteilen. Wegen dem Schubfachprinzip muss dann aber eine dieser Geraden zwei Punkte beinhalten. Zusammen mit x hat dann diese Gerade drei Punkte, also gibt es eine Gerade unter unseren fünf Punkten. $\square$

Schubfachprinzip für Dimension 2

3.2 Dimension 3

Jetzt wiederholen wir das Spiel in der Dimension 3. Wenn man einen Punkt im $\mathbb{F}_3^3$ anschaut, sieht man, dass man $26 = 27 - 1$ weitere Punkte wählen kann, mit welches dieser zu dritt jeweils eine Gerade bildet. Das heißt durch jeden Punkt gibt es $13 = \frac{26}{2}$ Geraden. Insgesamt gibt es also wieder nach doppeltem Abzählen der Punkte auf Geraden insgesamt $\frac{13 \cdot 27}{3} = 117$ Geraden. Das sind leider ganz schön viele und wir werden damit nicht weiter kommen. Stattdessen werde wir etwas anderes zählen.

Als erstes werden wir jetzt wieder versuchen, durch Probieren eine möglichst große Zahl an Punkten zu finden, so dass keine Gerade darunter ist.

Aufgabe 6.

Finde möglichst viele Punkte im $\mathbb{F}_3^3$, so dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Wenn du auch neun solche Punkte gefunden hast, dann können wir jetzt beweisen, dass es wirklich nicht mit mehr geht.

Satz 3.2. *Unter zehn Punkten im $\mathbb{F}_3^3$ befinden sich immer drei, die auf einer Geraden liegen.*

Beweis. Anstatt wie in Dimension 2 den Raum $\mathbb{F}_3^3$ in Geraden zu zerlegen, werden wir ihn in *Ebenen* zerlegen und dann das Resultat für die Dimension 2 nutzen, also dass sobald 5 Punkte in einer Ebene $\mathbb{F}_3^2$ liegen, sich darunter drei auf einer Geraden befinden.

Der $\mathbb{F}_3^3$ besteht aus 3 Ebenen mit jeweils 9 Punkten. Wir müssen als erstes die Anzahl der Ebenen bestimmen, die eine gegebene Gerade beinhaltet. Da eine Gerade drei Punkte hat, definieren die restlichen $27 - 3 = 24$ Punkte zusammen mit der Geraden jeweils eine eindeutige Ebene. Da aber jede Ebene aus 9 Punkten besteht, von denen wir bereits 3 in der Geraden gezählt haben, haben wir jede Ebene sechs mal gezählt. Das heißt, es gibt durch eine gegebene Gerade $\frac{24}{6} = 4$ Ebenen.

Jetzt verteilen wir unsere zehn Punkte auf die drei Ebenen. Wenn eine Ebene davon fünf Punkte beinhaltet, sind wir fertig, denn nach dem Satz 3.1 gibt es dann eine Gerade darunter. Wenn es keine fünf Punkte in einer der drei Ebenen gibt, müssen sich die zehn Punkte auf die drei Ebenen als $4 - 4 - 2$ oder $4 - 3 - 3$ verteilen. Es gibt also eine Ebene E mit 2 oder 3 Punkten, so dass sich die restlichen 8 oder 7 Punkte auf den Rest verteilen. In dieser Ebene gibt es zwei Punkte, die auf einer Geraden L liegen.

Ebene E und Gerade L im $\mathbb{F}_3^3$

Wir hatten uns vorher überlegt, dass durch diese Gerade L mit zwei besetzten Punkten nun vier Ebenen gehen, wobei eine davon die Ebene E ist. Da diese vier Ebenen alle Punkte in $\mathbb{F}_3^3$ abdecken, müssen wir also die restlichen 7 oder 8 Punkte auf die restlichen 3 Ebenen verteilen. Wegen dem Schubfachprinzip muss dann aber eine dieser drei Ebenen drei Punkte außerhalb von L beinhalten, denn $3 \cdot 2 = 6 < 7, 8$. Nenne diese Ebene F. Die drei Punkte in F bilden dann aber mit den zwei Punkten in L zusammen 5 Punkte in der Ebene F, welche dann wiederum wegen Satz 3.1 eine Gerade beinhalten müssen. Damit sind wir fertig. $\square$

3.3 Dimension 4

Am besten wäre es jetzt, wenn wir genau die gleiche Argumentationsweise der Dimensionen 2 und 3 auf unsere Zieldimension 4 anwenden könnten. Leider stellt sich heraus, dass das nicht ganz so einfach funktioniert. Stattdessen gehen wir wie folgt vor. Wir zählen, *auf wieviele Arten und Weisen eine gegebene Punktmenge im* $\mathbb{F}_3^4$ *auf dreidimensionale Würfel verteilt werden kann.* Wir werden diese Anzahlen dann auf verschiedene Weisen zählen und dadurch einen Widerspruch finden.

Zunächst benötigen wir die Anzahl der Punkte im $\mathbb{F}_3^4$.

Aufgabe 7.

Wieviele Punkte beinhaltet der $\mathbb{F}_3^4$? Aus wievielen Würfeln besteht der $\mathbb{F}_3^4$ und wieviele Punkte beinhalten diese jeweils?

Damit wir weiter arbeiten können, stellen wir also fest, dass es $3^4 = 81$ Karten gibt und die drei Würfel jeweils 27 Punkte besitzen. Wir wollen die folgende Aussage beweisen.

Satz 3.3. *Unter* 21 *Karten befindet sich mindestens ein Set.*

Angenommen, wir hätten 21 Punkte im $\mathbb{F}_3^4$ ohne ein Set darunter. Analog zu den niedrigeren Dimensionen können wir den $\mathbb{F}_3^4$ in drei Würfel aufteilen und die 21 Punkte auf diese verteilen, so dass in jedem dieser Würfel weniger als zehn Punkte enthalten sind, denn sonst gäbe es ja ein Set darin nach Satz 3.2. Dann gibt es die Möglichkeiten

$$\{9,9,3\},\{9,8,4\},\{9,7,5\},\{9,6,6\},\{8,8,5\},\{8,7,6\} \text{ und } \{7,7,7\} \tag{1}$$

für Verteilungen von 21 Punkten auf die drei Würfel. Wir bezeichnen jetzt mit x_{993} die Anzahl an Möglichkeiten, den $\mathbb{F}_3^4$ in drei Würfel so zu unterteilen, dass sich die 21 Punkte als $\{9,9,3\}$ auf diese verteilen. Analog sind die Zahlen x_{984}, x_{777} und so weiter definiert.

Als erstes zählen wir jetzt die Gesamtzahl an Möglichkeiten, den $\mathbb{F}_3^4$ in drei Würfel zu zerlegen.

Satz 3.4. *Es gibt* 40 *Möglichkeiten, den* $\mathbb{F}_3^4$ *in drei Würfel zu zerlegen.*

Beweis. Eine Zerlegung des $\mathbb{F}_3^4$ in drei (automatisch parallele) Würfel ist spezifiziert durch eine Gerade, welche senkrecht zu diesen Würfeln liegt und durch den Ursprung verläuft (oder irgend einen anderen festen Punkt). Also müssen wir nur Geraden durch den Ursprung zählen. Der Ursprung hat laut Aufgabe 7 80 weitere Punkte und jeder davon definiert eine Gerade. Allerdings besteht jede Gerade aus drei Punkten inklusive des Ursprungs, weshalb wir alle Geraden doppelt zählen. Es gibt demnach $\frac{80}{2} = 40$ Geraden durch den Ursprung und demnach auch 40 Möglichkeiten, den $\mathbb{F}_3^4$ in drei Würfel zu zerlegen. □

Da nun jede Zerlegung in drei Würfel die 21 Punkte in genau eine der Verteilungen in (1) aufteilt, erhalten wir die Gleichung

$$x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} = 40 \tag{2}$$

für die nicht-negativen ganzen Anzahlen x_i von oben. Wir benötigen jetzt noch weitere Gleichungen für diese Zahlen um einen Widerspruch zu finden.

Satz 3.5. *Es gilt*

$$75x_{993} + 70x_{984} + 67x_{975} + 66x_{966} + 66x_{885} + 64x_{876} + 63x_{777} = 2730. \tag{3}$$

Beweis. Als erstes zählen wir, wieviele Würfel es durch zwei *vorgegebene* Punkte gibt. Wenn man einen weiteren Punkt außerhalb der Gerade durch die zwei Punkte wählt, legen diese drei eine Ebene fest. Ein weiterer Punkt außerhalb dieser Ebene legt dann einen Würfel eindeutig fest. Für den dritten Punkt gibt es $81 - 3 = 78$ Möglichkeiten, für den vierten dann $81 - 9 = 72$ Möglichkeiten. Allerdings haben wir jetzt die Ebenen am Anfang überzählt, weil $9 - 3 = 6$ Punkte ja die gleiche Ebene definieren und genauso beim vierten Punkt jeder Würfel $27 - 9 = 18$ mal gezählt wurde. Das heißt wir haben insgesamt $\frac{78 \cdot 72}{6 \cdot 18} = 52$ Würfel wobei wir immer noch einige mehrfach gezählt haben. Dies kommt daher, dass jeder solche Würfel mehrere der vorher gewählten Ebenen beinhaltet. Aber wieviele sind das? Naja, dazu müssen wir ausrechnen, wieviele Ebenen in einem Würfel durch eine gegebene Gerade gehen. Das haben wir aber bereits oben im Beweis von Satz 3.2 gemacht und die Antwort war 4. Das heißt, durch zwei gegebene Punkte im $\mathbb{F}_3^4$ gibt es $\frac{52}{4} = 13$ Würfel.

Als nächstes zählen wir die mit zwei Punkten besetzten Würfel, indem wir Paare von belegten Punkten und die Würfel durch diese Punkte zählen. Dabei zählen wir natürlich alles mehrfach, aber das ist nicht schlimm, wenn wir dies auf der anderen Seite der Gleichung tun. Es gibt $\binom{21}{2} = \frac{21!}{(21-2)! \cdot 2!}$ Möglichkeiten, zwei Punkte unter den 21 auszuwählen und damit insgesamt $13 \cdot \binom{21}{2} = 13 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 2730$ solche Würfel.

Wir können aber alternativ in jeder der x_{993}-vielen Zerlegungen in $\{9, 9, 3\}$-Würfel jeweils zwei Punkte pro Würfel auswählen und diese Möglichkeiten aufaddieren. Im Beispiel erhalten wir $\binom{9}{2}$ mögliche Paare von Punkten für den ersten Würfel, $\binom{9}{2}$ mögliche Paare für den zweiten und $\binom{3}{2}$ für den letzten Würfel. Dies ergibt $36 + 36 + 3 = 75$ Paare von Punkten, die jeweils einen der x_{993}-vielen entsprechenden Würfel geben. Wenn wir die gleiche Rechnung für alle neun Fälle in (1) machen, zählen wir jeden Würfel zusammen mit Paaren von enthaltenen Punkten.

Das heißt wir erhalten die Gleichung

$$\left(\binom{9}{2} + \binom{9}{2} + \binom{3}{2}\right) x_{993} + \cdots + \left(\binom{7}{2} + \binom{7}{2} + \binom{7}{2}\right) x_{777} = 2730,$$

welche nach längerem Ausrechnen die zu zeigende Gleichung gibt. □

Jetzt haben wir zwei Gleichungen für die sieben nicht-negativen Unbekannten, welche aber leider immer noch keinen Widerspruch liefern. Deswegen leiten wir jetzt noch eine weitere Gleichung her.

Satz 3.6. *Es gilt außerdem*

$$169x_{993} + 144x_{984} + 129x_{975} + 124x_{966} + 122x_{885} + 111x_{876} + 105x_{777} = 5320. \tag{4}$$

Beweis. Dieses Mal zählen wir Würfel, indem wir *drei* besetzte Punkte fixieren. Da die drei nicht auf einer Geraden liegen können, definieren diese eine Ebene.[6] Das heißt, dass

[6]Sonst wären wir ja fertig, weil wir zeigen wollten, dass es eine Gerade mit drei besetzten Punkten gibt.

ein weiterer der $81 - 9 = 72$ Punkte einen eindeutigen Würfel definiert. Dabei haben wir aber wieder jeden Würfel $27 - 9 = 18$ mal gezählt, das heißt es gibt insgesamt vier Würfel durch drei besetzte Punkte. Wenn wir jetzt drei Punkten aus den 21 auswählen zählen wir also ingesamt $4 \cdot \binom{21}{3} = 5320$ Würfel zusammen mit drei belegten Punkten.

Jetzt zählen wir wieder anders, indem wir zuerst die Verteilung der Punkte auf drei Würfel fixieren. Angenommen, wir haben eine $\{9, 9, 3\}$-Zerlegung. Dann wird der entsprechende erste Würfel $\binom{9}{3}$-mal gezählt, der zweite genauso und der dritte $\binom{3}{3}$-mal. Insgesamt erhält man nach einigem Rechnen die Gleichung

$$\left(\binom{9}{3} + \binom{9}{3} + \binom{3}{3}\right) x_{993} + \cdots + \left(\binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{3}\right) x_{777} = 5320,$$

welche wiederum zur zu beweisenden Gleichung wird. $\square$

Jetzt können wir den Beweis unserer Hauptaussage Satz 3.3 angehen.

Beweis. Angenommen, wir haben 21 Punkte im $\mathbb{F}_3^4$ ohne drei davon auf einer Geraden. Dann gelten die Gleichungen (2), (3) und (4). Wir rechnen $693 \cdot (2) + 3 \cdot (4) - 16 \cdot (3)$ und erhalten

$$5x_{984} + 8x_{975} + 9x_{966} + 3x_{885} + 2x_{876} = 0$$

und damit $x_{984} = x_{975} = x_{966} = x_{885} = x_{876} = 0$. Außerdem erhalten wir für $(3) - 63 \cdot (2)$, dass

$$12x_{993} = 210,$$

was unmöglich ist für eine ganze Zahl x_{993}. Also muss unsere Voraussetzung falsch sein, das heißt es muss unter 21 Punkten im $\mathbb{F}_3^4$ eine Gerade und damit unter 21 Karten immer ein Set geben. $\square$

4 Existenzbeweise

Je nachdem wie erfolgreich ihr in den Aufgaben **??** und **??** wart, haben wir bis jetzt nur gezeigt, dass ab 5, 10 oder 21 Karten sicher ein Set für 2, 3 oder 4 Eigenschaften darunter ist. Wir sollten aber noch zeigen, dass diese Zaheln optimal sind im Sinne, dass es 4, 9 oder 20 Karten so gibt, dass sich darunter *kein* Set befindet. Diesmal können wir also die Aufgaben **??** und **??** etwas konkreter formulieren:

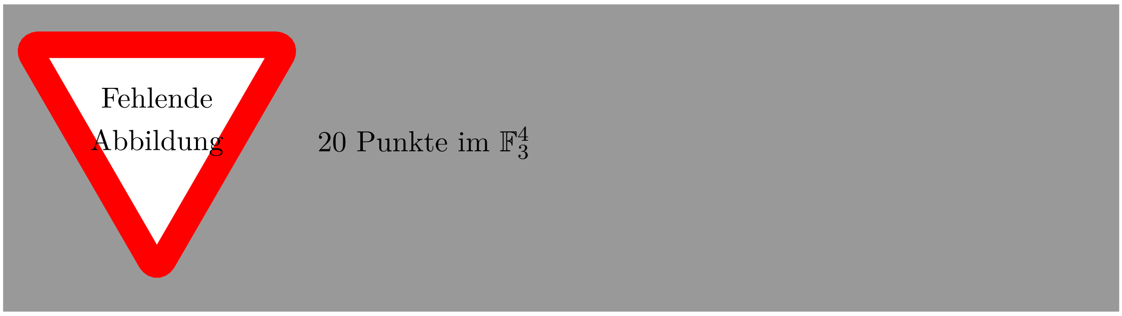
Aufgabe 8.

Finde eine Konfiguration von vier Punkten im $\mathbb{F}_3^2$, so dass sich darunter keine Gerade befindet.

Aufgabe 9.

Finde eine Konfiguration von neun Punkten im $\mathbb{F}_3^3$, so dass sich darunter keine Gerade befindet. Du kannst den $\mathbb{F}_3^3$ visualisieren, indem du drei Ebenen à neun Punkten untereinander zeichnest.

Da die Aufgabe für 20 Punkte im $\mathbb{F}_3^4$ doch zu schwer ist, ist hier ein Bild von einer möglichen Lösung.



Welchen Karten entspricht das im Spiel Set?