Topologie in der Physik

Sven Prüfer

Institut für Mathematik, Universität Augsburg

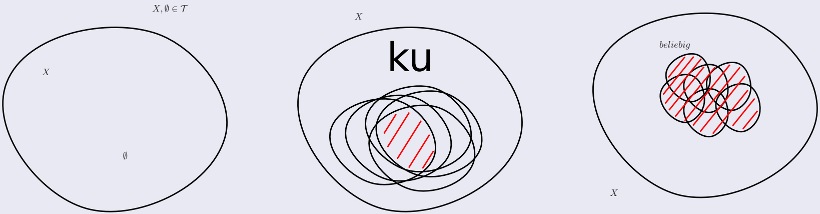
25.05.2013

Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Einführung

Definition

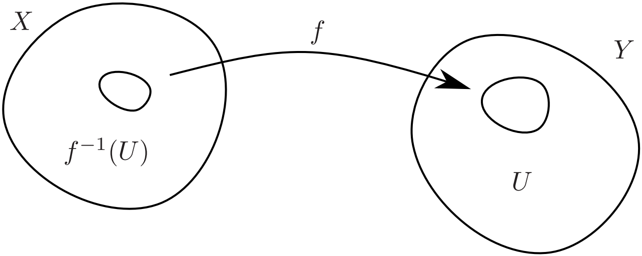
Sei X eine Menge. Eine Topologie auf X ist eine Menge von Mengen $\mathcal{T} = \{U_i\}_{i \in I}$ (die U_i heißen offene Mengen), s.d.



Einführung

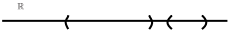
Definition

Seien X und Y topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt stetig genau dann, wenn $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist für alle offenen $U \subset Y$.



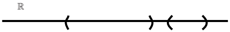
Beispiele

- $\mathbb{R}$, mit offenen Mengen $=$ offenen Intervallen plus deren Vereinigungen

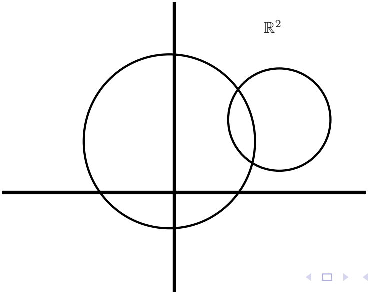


Beispiele

- $\mathbb{R}$, mit offenen Mengen = offenen Intervallen plus deren Vereinigungen

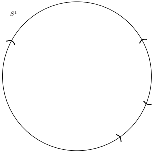


- $\mathbb{R}^n$, mit offenen Mengen = offene Kugeln plus deren Vereinigungen und endliche Schnitte



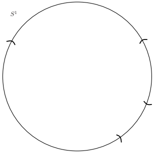
Beispiele

- S^1, der Kreis mit offenen Mengen = offene Kreisabschnitte plus deren Vereinigungen

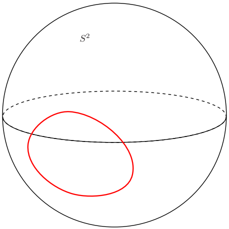


Beispiele

- S^1, der Kreis mit offenen Mengen = offene Kreisabschnitte plus deren Vereinigungen



- S^n, die n-dimensionale Einheitssphäre



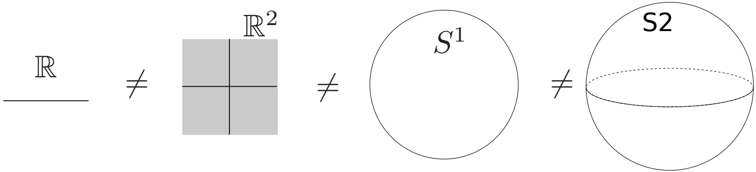
Unterscheidung der Räume

Frage: Wie unterscheidet man $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, S^1 und S^n?

Unterscheidung der Räume

Frage: Wie unterscheidet man $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, S^1 und S^n?

Antwort: Ist doch klar!



Homotopiegruppen

Sei X top. Raum. Betrachte $\gamma : S^1 \longrightarrow X$ stetig.

Definition

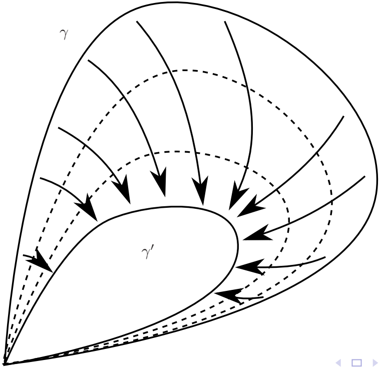
$\gamma, \gamma' : S^1 \longrightarrow X$ stetig, heißen homotop, wenn sich γ stetig als Abbildung von $S^1 \longrightarrow X$ in γ' deformieren lässt.

Homotopiegruppen

Sei X top. Raum. Betrachte $\gamma : S^1 \longrightarrow X$ stetig.

Definition

$\gamma, \gamma' : S^1 \longrightarrow X$ stetig, heißen homotop, wenn sich γ stetig als Abbildung von $S^1 \longrightarrow X$ in γ' deformieren lässt.



Homotopiegruppen

Definition

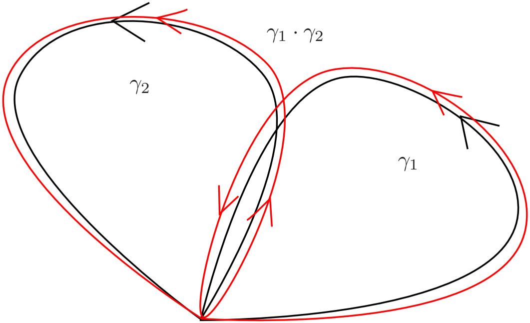
$\pi_1(X, p)$ ist die Fundamentalgruppe von X und ist definiert als die Menge aller Homotopieklassen $[\gamma]$ mit festem Endpunkt $p \in X$.

Homotopiegruppen

Definition

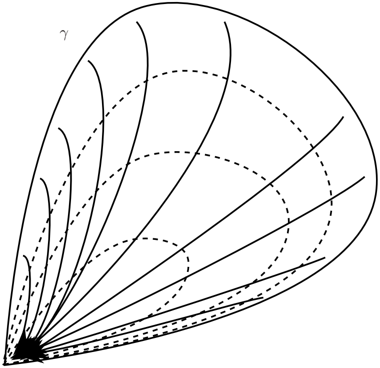
$\pi_1(X, p)$ ist die Fundamentalgruppe von X und ist definiert als die Menge aller Homotopieklassen $[\gamma]$ mit festem Endpunkt $p \in X$.

Hintereinanderdurchlaufen gibt eine Gruppenmultiplikation auf $\pi_1(X, p)$.



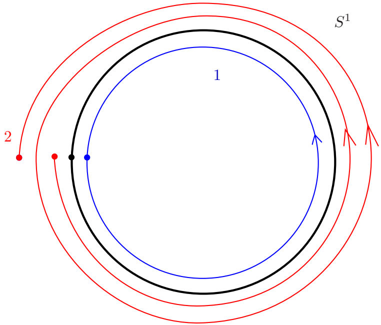
Beispiele Homotopiegruppen

- $\pi_1(\mathbb{R}^n, p) \cong 0$



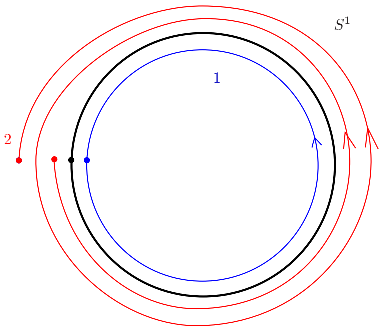
Beispiele Homotopiegruppen

- $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$



Beispiele Homotopiegruppen

- $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$



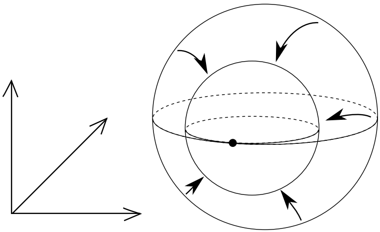
- $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$

Höhere Homotopiegruppen

Analog können höhere Homotopiegruppen definiert werden.

Höhere Homotopiegruppen

Analog können höhere Homotopiegruppen definiert werden.



Das heißt $[\gamma] \in \pi_k(X, p)$ bedeutet, dass $\gamma : S^k \longrightarrow X$ stetig ist, durch p geht und nur wohldefiniert bis auf Homotopie ist.

Verbindung zur Analysis

Die Topologie eines Raums beeinflusst Eigenschaften von Differentialgleichungen.

- Kompaktheit $\Longrightarrow$ Z.B: Dimension des Lösungsraum von Laplace-Gleichung endlich
- Übergang von lokaler Lösung zu globaler Lösung kann erschwert werden
- Index-Sätze, z.B. $4\pi\chi = \int_X$ scal dvol auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche X mit Metrik g

Klassifikation von Störungen in Festkörpern

Betrachte dreidimensionalen Festkörper und Vektorfeld (z.B. elektrisches Feld) sowie einen Punktdefekt in p. Betrachte festen Betrag von Vektorfeld und schränke Betrachtung auf Sphäre um p ein.

$\Longrightarrow$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen sind nicht stetig ineinander deformierbar (z.B. durch langsames Ändern der Ladungen außerhalb des Festkörpers), sondern werden durch $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ parametrisiert.

Periodische Randbedingungen

Betrachte endlich lange eindimensionale Kette von Federn zwischen identischen Massen. Nach üblicher stetiger Approximation erfüllen diese eine Wellengleichung. Typischer Ansatz für Randwerte: periodische Randbedingungen. Dies entspricht der Lösung der Wellengleichung auf einem Kreis. Lösungen kommen in diskreten Periodenlängen, diese entsprechen genau $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Maxwell-Gleichungen

Ein geschlossener elektrischer Leiter C wird von Strom I durchflossen mit Stromdichte J. Dann erzeugt dieser Fluss ein Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ und es gilt das Maxwell–Ampére-Gesetz:

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_S \mu_0 \boldsymbol{J} \boldsymbol{dS},$$

wobei S eine beliebige von C berandete glatte und kompakte Fläche ist.
Für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{A} &= 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{J} \\ \Longrightarrow \Delta \boldsymbol{A} &= -\mu_0 \boldsymbol{J} \end{aligned}$$

Verknotete Leiter I

Wir betrachten zwei elektrische Leiter, C und C', beide geschlossen. C' wird von konstantem Strom I durchflossen und erzeugt demnach ein Vektorpotential, dessen Magnetfeld wir berechnen können.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{d}^3\boldsymbol{r}' \, \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{dl}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Verknotete Leiter II

Berechne $\int_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl}$ auf zwei verschiedene Art und Weisen:

(i) Einsetzen von $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ von voriger Folie:

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_C -\frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) \times \boldsymbol{dl'} \cdot \boldsymbol{dl}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^3}$$

(ii) Benutzen von Maxwell–Ampére:

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_S \mu_0 \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{dS} = \mu_0 m I,$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ zählt, wie oft C' S schneidet.

Daraus folgt

$$-\frac{1}{4\pi} \int_C \int_{C'} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) \times \boldsymbol{dl'} \cdot \boldsymbol{dl}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^3} = m.$$

Topologie in der Quantenmechanik

Mantra der Quantenmechanik: Wahrscheinlichkeit von Zustand A in Zustand B überzugehen ist gegeben durch ein (Pfad-)Integral über alle möglichen klassischen Wege bzw. Zustände.

$$\langle A|B\rangle = \int_{\mathcal{Z}_{A,B}} e^{iS}\mu$$

S ist die Wirkung des klassischen Problems. $\mathcal{Z}_{A,B}$ ist der Raum der klassischen Lösungen, die die Zustände A und B verbindet.

Beobachtung: nicht-triviale Topologie auf zugrundeliegendem Raum kann $\mathcal{Z} : A, B$ nicht-zusammenhängend machen

$\Longrightarrow$ Integral beinhaltet Summen über “topologisch nicht-triviale” klassische Lösungen, welche prinzipiell auch einen Beitrag liefern können.

Aharonov–Bohm-Effekt I

Betrachte $\mathbb{R}^3$ mit einem unendlich langen geraden Leiter C durch welchen ein konstanter Strom I fließt. Laut Maxwell erzeugt dieser ein radiales Vektorpotential, das rotationsfrei ist und damit $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ für $\boldsymbol{r}$ außerhalb des Leiters.

Das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ verändert die klassische Wirkung S, resultiert aber in der gleichen Bewegungsgleichung für das Teilchen, da in dieser nur $\boldsymbol{B}$ auftaucht. Ein klassisches geladenes Teilchen spürt bemerkt dadurch nichts vom Leiter.

Aharonov–Bohm-Effekt II

Im Pfadintegral der Quantenmechanik ändert sich auch die Wirkung S. Dies gibt jedem Pfad γ eine extra Phase

$$e^{i\frac{q}{\hbar}\int_\gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}.$$

Insbesondere ist diese Phase eines geschlossenen Weges um den Leiter nicht Null.
Dadurch gibt es insgesamt verschiedene Phasenverschiebungen bei unterschiedlichen Wegen, was experimentell nachweisbar ist.
$\Longrightarrow$ Aharonov–Bohm-Effekt

Zusammenfassung

- Topologie taucht (meist unbemerkt) in der Physik auf.
- Um so mehr man Richtung Feldtheorie oder Hochenergiephysik geht, um so mehr Topologie spielt eine Rolle.
- Beispiele für Topologie in der Physik:
  - Lösungen von partiellen Differentialgleichungen
  - Festkörpertheorie (Störungen, Tori)
  - Elektromagnetismus und kompliziertere Feldtheorien (Knoten, 3- oder 4-Mannigfaltigkeiten)
  - Quantentheorie (Aharonov–Bohm)
  - Existenz von Spin

Danke für die Aufmerksamkeit!