Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015

Erster Zirkelbrief: Komplexe Zahlen

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenbereiche

In diesem Brief soll es um Zahlen gehen. Das klingt langweilig? Nicht doch! Im Laufe eures Lebens seid ihr schon vielen verschiedenen Zahlen begegnet: Als kleine Kinder konntet ihr nur zählen, d. h. ihr kanntet nur die *natürlichen Zahlen* 1, 2, 3, . . . Viele Jahre lang waren diese auch völlig ausreichend und ihr habt in der Grundschule gelernt, damit zu rechnen, so gut es halt ging: Addieren und Multiplizieren war problemlos möglich, Subtrahieren und Dividieren aber nur mit Einschränkungen.

In der fünften Klasse lerntet ihr die negativen Zahlen kennen, die zusammen mit den natürlichen Zahlen die *ganzen Zahlen* bilden. Ein weiteres Jahr später kamen Brüche und damit die *rationalen Zahlen*. Diese bilden zusammen mit den irrationalen Zahlen wie beispielsweise die Kreiszahl $\pi = 3{,}1415926\ldots$ die *reellen Zahlen*.

Bei jeder neuen Erweiterung fanden die Menschen die „neuen“ Zahlen als völlig unnötig und trotzdem verwenden wir sie heute, als wären sie das Selbstverständlichste der Welt. Wir wollen in diesem Brief mit euch *noch mehr* Zahlen kennen lernen. Ihr glaubt, dass das nicht geht und die reellen Zahlen ja schon alles sind? Dann lasst euch überraschen!

Wir beginnen mit einer kurzen Übersicht über alle Zahlbereiche, die ihr schon kennt, und erklären, wofür Menschen diese Zahlbereiche einführten und bis wann sie von diesen Zahlbereichen noch überhaupt nichts wussten.

1.1 Natürliche Zahlen

Definition: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Erfunden, um Objekte zu zählen.

Intuitive Bedeutung: Anhäufen, Verschieben oder *Zählen*

Merkwürdig bis ca. 1500 v. Chr. Die Null wurde wohl als eigenständige Zahl von den Indern um 500 n. Chr. das erste Mal benutzt, wurde aber erst in Inden um 900 n. Chr. und in Europa im 12. Jahrhundert regelmäßig verwendet.

1.2 Ganze Zahlen

Definition: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Erfunden, um mit „Schulden" einfach Rechnen zu können. Zum Beispiel, was ist $3 - 5$? Oder wenn ich dir zwei Goldtaler gebe, du mir drei zurückgibst, wieviel schulde ich dir?

Intuitive Bedeutung der negativen Zahlen: *Gegenteil von Besitz, Schuld* oder *Gegenrichtung.* Anstatt zu vermehren wird etwas *vermindert.*

Merkwürdig bis zum 17. Jahrhundert in Europa. Erste Erwähnungen aber bereits 200 vor bis 200 nach Christus in China.

1.3 Rationale Zahlen

Definition: $\mathbb{Q} = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$, also alle Zahlen, die sich als Bruch von zwei ganzen Zahlen schreiben lassen.

Erfunden, um Verhältnisse beschreiben zu können sowie Fragen á la „Welche Zahl mit Drei multipliziert ist gleich Zwei?" beantworten zu können.

Intuitive Bedeutung von Brüchen sind Verhältnisse.

Merkwürdig bis ca. 300 v. Chr. Benutzt und intuitiv als Verhältnis verstanden wurden sie bereits von den Indern, Ägyptern und Griechen.

Rechenregeln Rationale Zahlen können addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden (außer durch Null!). Wichtig dafür ist, dass man Brüche *erweitern* kann, wie in

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}.$$

Aufgabe 1. *Rechnen mit rationalen Zahlen (zum Aufwärmen)*

a) Angenommen, zwei rationale Zahlen haben den gleichen *Nenner*, also die natürliche Zahl unter dem Bruchstrich. Was bedeutet ihre Summe anschaulich? Wie kann man diese berechnen?

b) Was ist $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$? Was ist $\frac{3}{7} - \frac{3}{5}$?

c) Was bedeutet die Multiplation von zwei rationalen Zahlen anschaulich?

d) Wie kann man das Produkt von zwei rationalen Zahlen berechnen? Was ist $\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{9}$?

Aufgabe 2. *Inverse von rationalen Zahlen*

Das *Inverse* einer Zahl ist diejenige Zahl, welche mit der gegebenen Zahl mutlipliziert gleich Eins ist.

a) Wie kann man das Inverse einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ berechnen? Was ist das Inverse von $\frac{2}{3}$?

b) Division ist nichts anderes als das Multiplizieren mit dem Inversen einer Zahl. Was ist $\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$? Was bedeutet das anschaulich?

1.4 Reelle Zahlen

Definition: $\mathbb{R} = \{0{,}323454,\ 0,\ 5,\ 0{,}33\overline{33},\ -17,\ -3{,}14125868,\ \ldots\}$, das heißt alle Zahlen, die sich als „unendliche Kommazahlen“ schreiben lassen. Dabei muss die Dezimaldarstellung nicht irgendwann aufhören, es sind unendliche sich-nicht-wiederholende Ausdrücke erlaubt. Die ganzen Zahlen sind in den reellen enthalten (man schreibt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$) und die rationalen genauso, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dies liegt daran, dass Brüche immer geschrieben werden können als endliche Dezimalzahlen oder unendliche sich wiederholende (sogenannte *periodische*) Dezimalzahlen.

Erfunden, um die Frage zu beantworten, welche Zahl mit sich selbst multipliziert gleich 2 ist.

Intuitive Bedeutung der irrationalen Zahlen: als „Grenzwerte“ von rationalen Zahlen und Lösungen von Gleichungen, in denen Zahlen mit sich selbst multipliziert werden.

Merkwürdig bis ca. 1000 n. Chr. Entdeckt wurden die irrationalen Zahlen bereits ca. 500 v. Chr. von den Pythagoräern und sind auch in Euklids *Elemente*[1] vermerkt.

Beispiele: $\pi = 3{,}1415926535\ldots$, $e = 2{,}71828182845904523536028747135266 2\ldots$ oder $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731 76\ldots$

Aufgabe 3. *Irrationalität der Quadratwurzel aus Zwei*

Die *Quadratwurzel aus Zwei* ist diejenige positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert Zwei ergibt: $x \cdot x = 2$. In dieser Aufgabe beweist du, dass die Quadratwurzel aus Zwei keine rationale Zahl sein kann und daher irrational ist. Das ist ein ganz erstaunliches Resultat, das manche als die Geburtsstunde der Mathematik sehen: Ob wir es wollen oder nicht – es gibt sehr anschauliche Zahlen, die nicht rational sind.

a) Nimm einfach das Gegenteil an, nämlich, dass x rational ist. Wie lässt sich dann x laut der Definition von rationalen Zahlen schreiben?

b) Angenommen es gilt jetzt $2 \cdot a \cdot a = b \cdot b$ wobei a und b natürliche Zahlen sind und gekürzt wurden, also ihr größter gemeinsamer Teiler gleich Eins ist. Zeige, dass dann b durch 2 teilbar ist.

c) Folgere analog, dass a durch 2 teilbar ist.

d) Warum ist das ein Widerspruch und warum folgt daraus, dass x irrational ist?

[1] Euklid hat ca. 300 v. Chr. alles mathematische Wissen seiner Zeit in den 13 Büchern mit dem Titel „Die Elemente“ aufgeschrieben.

Aufgabe 4. *Die Quadratwurzel aus Zwei anschaulich*

Die Quadratwurzel aus Zwei ist keine besonders seltsame Zahl. Wenn du den *Satz von Pythagoras* schon kennst, dann beweise folgendes: Die Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit Seitenlänge Eins ist die Quadratwurzel aus Zwei.

2 Komplexe Zahlen

2.1 Motivation und Definition

Was für Gleichungen können wir mit den rellen Zahlen lösen? Beispiele sind $x + 5 = 2$, $3x = 2$ und $x \cdot x = 2$, wobei wir für jede Gleichung davon einen neuen Zahlenbereich einführen mussten: Für $x + 5 = 2$ die negativen Zahlen, für $3x = 2$ die rationalen Zahlen und für $x \cdot x = 2$ die reellen Zahlen. Welche anderen Gleichungen gibt es noch? Die vielleicht interessanteste Frage ist:

Welche Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert minus Eins?

In Gleichungen bedeutet dies: Welche Zahl x erfüllt $x \cdot x = -1$? Wenn $x = 1$ wäre, hätten wir $x^2 = x \cdot x = 1 \cdot 1 = 1$. Wäre $x = -1$, dann hätten wir $x^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$. Auch wenn wir jede andere relle Zahl mit sich selber multiplizieren, ist das Ergebnis immer positiv. Daher gibt es keine reelle Zahl, die $x^2 = -1$ löst.

Definition. Deswegen definieren wir einfach eine neue Zahl, die diese Gleichung löst und nennen sie i, die imaginäre Einheit. Sie erfüllt demnach $\mathrm{i}^2 = -1$. Wir wollen außerdem, dass alle bisherigen Rechenregeln weiter gelten, wir können i beim Rechnen also wie eine reelle Zahl behandeln, nur dass sie eben $\mathrm{i}^2 = -1$ erfüllt.[2]

2.2 Geometrische Vorstellung

Die gewohnten Rechenoperationen kann man sich alle auch geometrisch vorstellen. Wenn wir zum Beispiel eine Zahl mit -1 multiplizieren, bedeutet das auf dem Zahlenstrahl, dass wir diese Zahl an der Null spiegeln.

Das Multiplizieren mit einer positiven reellen Zahl entspricht dem Strecken des Abstands von der Null.

Was entspricht aber nun der Multiplikation mit i?

[2] Die imaginäre Einheit i hat sich um 1600 einigen Mathematikern regelrecht aufgedrängt. Man kannte nämlich schon eine bestimmte Formel zum Lösen von kubischen Gleichungen. Die war umgemein praktisch und hat in vielen Fällen auch wunderbar funktioniert – aber leider nicht immer. In manchen Fällen muss man bei dieser Formel nämlich Zahlen verwenden, deren Quadrat negativ ist. Das gelingt nur unter Verwendung der imaginären Einheit.

Aufgabe 5. *Was macht* i*?*

a) Zeichne eine Zahlengerade sowie die Strecke von 0 bis 1, diese soll zur Zahl 1 gehören. Welcher Strecke entspricht die Zahl -1? Was ist mit der 4, der $-\frac{1}{2}$?

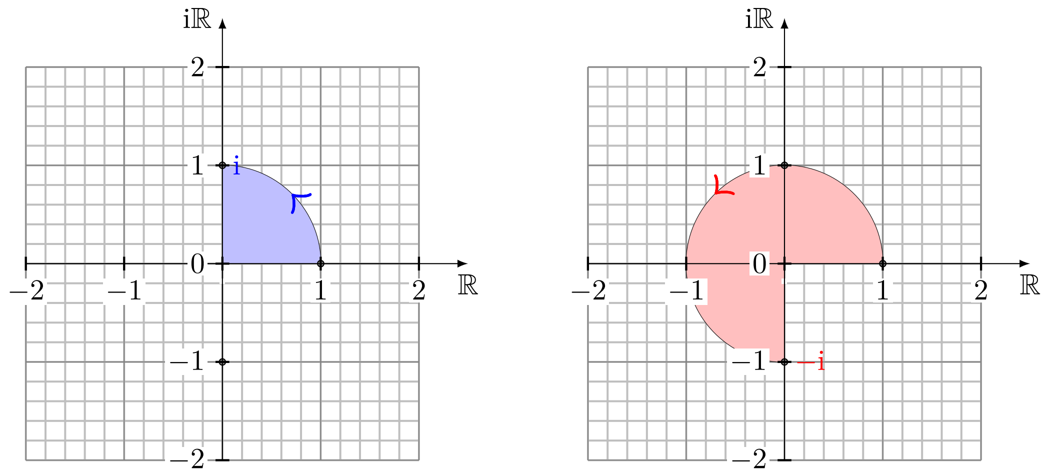
b) Nimm irgendeine Zahl auf dem Zahlenstrahl, zum Beispiel deine Lieblingszahl. Multipliziere diese Zahl mit i. Momentan können wir uns noch nicht vorstellen, was das Ergebnis geometrisch sein soll. Lass dich davon aber nicht beirren, und multipliziere das Ergebnis ein zweites Mal mit i. Wenn du die Rechenregel $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ verwendest, kannst du ganz klar sagen, welche Zahl hier herauskommt.

c) Wenn du Teilaufgabe b) verstanden hast, weißt du also folgendes: Wenn man eine Zahl *zweimal* mit i multipliziert, kommt das auf dasselbe heraus, wie wenn man die Zahl an der Null spiegelt. Das *einmalige Multiplizieren* mit i muss also irgendeine kuriose Operation sein, die, wenn man sie *zweimal* ausführt, dasselbe macht wie Spiegelung an der Null.

Welche geometrischen Operationen (Strecken, Zerren, Spiegeln, Drehen, ...) kennst du, die ebenfalls diese Eigenschaft haben?

Aus der vorherigen Aufgabe sieht man, dass wir nun eine Zahlenebene anstatt einer Zahlengeraden betrachten sollten. Die Ebene nennt man dann auch *Gaußsche Zahlenebene*. Die Zahl i liegt in dieser Ebene auf der y-Achse in Abstand 1 vom Ursprung und hat dementsprechend (x, y)-Koordinaten $(0, 1)$ (siehe Grafik links). Wie dort angedeutet entspricht die Multiplikation mit i der Drehung um 90ř gegen den Uhrzeigersinn. Die Zahl $3 \cdot \mathrm{i}$ liegt bei den Koordinaten $(0, 3)$, in der Grafik also oberhalb des Ausschnitts. Auch hier sieht man, dass wenn man die Zahl 3 mit i multipliziert, diese anschaulich um 90ř gedreht wird.

Es gibt noch eine zweite Drehung, die zweimal hintereinander ausgeführt die Spiegelung am Ursprung ergibt, diese ist auf der rechten Grafik eingezeichnet. Die Drehung um 270ř gegen den Uhrzeigersinn entspricht der Zahl $-\mathrm{i}$.



Was ist $1 + \mathrm{i}$? Mit Sicherheit keine reelle Zahl! Kann $1 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$ gelten? Was ginge schief dabei?

Aufgabe 6. *Eine falsche Gleichung*

Noch wissen wir nicht besonders viel über i. Aber trotzdem können wir schon verstehen, dass die Gleichung $1 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$ nicht gelten kann. Wieso nicht?

Also muss $1 + \mathrm{i}$ tatsächlich eine neue Zahl sein und wir können auch alle Summen aus reellen und imaginären Zahlen betrachten. Das sind *komplexe Zahlen*. Zahlen wie i (statt beispielsweise $1 + \mathrm{i}$) haben aber auch noch einen besonderen Namen: Eine *rein imaginäre Zahl* ist ein Produkt einer reellen Zahl und i, also zum Beispiel i, 3i oder auch $\pi\mathrm{i}$.

Definition. Die Menge der *komplexen Zahlen* ist die Menge aller Summen einer reellen Zahl und einer rellen Zahl multipliziert mit i. In Formeln also

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b, \text{ wobei } a \text{ und } b \text{ beliebige reelle Zahlen sind}\}.$$

Beispiele für komplexe Zahlen sind: $3 + 5\mathrm{i}$, $100 - 21\mathrm{i}$, $5\mathrm{i}$ (das ist dasselbe wie $0 + 5\mathrm{i}$). Auch die gewöhnlichen reellen Zahlen zählen als komplexe Zahlen (also ist zum Beispiel 42 eine komplexe Zahl). Das ist ganz genauso wie bei den anderen Zahlenbereichen: Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl und jede ganze Zahl ist auch eine rationale.

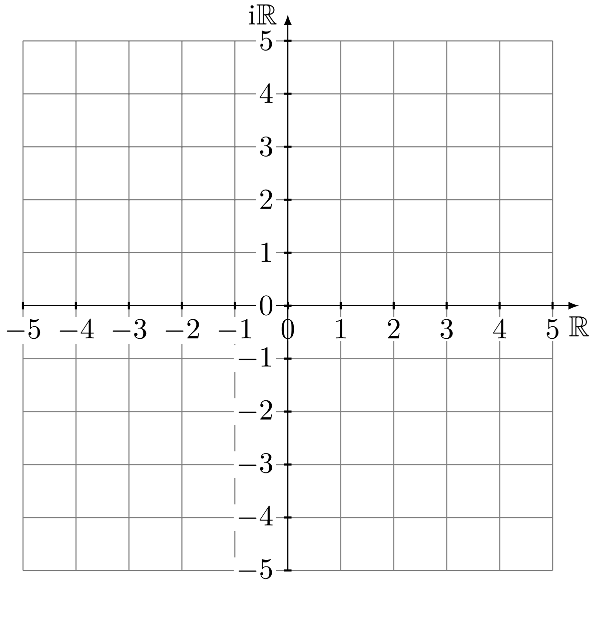
Wie bereits vorher erwähnt sollen für die komplexen Zahlen die üblichen Rechenregeln gelten, also zum Beispiel das Distributivgesetz, so dass

$$a + \mathrm{i}b + \mathrm{i}c = a + \mathrm{i}(b + c),$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind. Außerdem gilt $\mathrm{i} + 0 = \mathrm{i} = \mathrm{i} \cdot 1$ und $0 \cdot \mathrm{i} = 0$.

Aufgabe 7. *Gauß und seine Zahlenebene*

Die horizontale Achse in der Gaußschen Zahlenebene soll die Zahlengerade der reellen Zahlen sein, also derjenigen komplexen Zahlen $x = a + ib$ mit $b = 0$. Die vertikale Achse soll die rein imaginären Zahlen $x = a + ib$ mit $a = 0$ beschreiben. Zeichne die folgenden Zahlen in die komplexe Zahlenebene: 1, i, $1 + \mathrm{i}$, $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$, $-\mathrm{i}$, $4 - 2\mathrm{i}$ und $\frac{30}{8}\mathrm{i}$.



2.3 Grundrechenarten

Schauen wir uns mal ein paar Beispiele für Rechnungen mit den komplexen Zahlen an:

$$
\begin{aligned}
-2 + \mathrm{i} + 17\mathrm{i} + 2 &= 18\mathrm{i} \\
\mathrm{i} \cdot (1 + \mathrm{i}) &= \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} - 1 = -1 + \mathrm{i} \\
(3 - 4\mathrm{i}) \cdot (7 + \mathrm{i}) &= 21 - 28\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2 = 21 + (-28 + 3)\mathrm{i} - 4 \cdot (-1) = 25 - 25\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8. *Ein paar Rechnungen*

Vereinfache die folgenden komplexen Zahlen soweit wie möglich:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i} + 6 - 2\mathrm{i} &= \\
(2\mathrm{i} - 3) \cdot (1 + \mathrm{i}) &= \\
\frac{1}{\mathrm{i}} &=
\end{aligned}
$$

Die letzte Aufgabe wirft die Frage auf, wie man eigentlich Inverse von komplexen Zahlen berechnet, d. h. wie man durch komplexe Zahlen dividiert. Dies können wir nach dem nächsten Abschnitt ausführlicher behandeln.

2.4 Konjugation und Imaginär- sowie Realteil

Definition. Gegeben sei eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\mathrm{Re}(z) = a$ der *Realteil*, $\mathrm{Im}(z) = b$ der *Imaginärteil* von z und es gilt $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$. Beachte, dass der Imaginärteil einer komplexen Zahl eine *reelle* Zahl ist! Wir definieren auch das *komplex Konjugierte* $\overline{z} := a - ib$.

Zum Beispiel ist der Realteil von $12 - 7\mathrm{i}$ gleich 12. Der Imaginärteil ist -7 (Achtung, nicht $-7\mathrm{i}$). Das komplex Konjugierte von $12 - 7\mathrm{i}$ ist $12 + 7\mathrm{i}$.

Aufgabe 9. *Dinge von komplexen Zahlen*

Bestimme die komplex konjugierte Zahl sowie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen i, $4 - 2\mathrm{i}$ und $\frac{2+\mathrm{i}}{3}$.

Aufgabe 10. ** Real- und Imaginärteil*

Beweise, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.

b) $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$.

Aufgabe 11. *Normquadrat*

Beweise, dass für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dass $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Aus der letzten Aufgabe folgt, dass wir das Inverse einer komplexen Zahl bestimmen können, indem wir diese zunächst mit ihrer konjugierten erweitern (die bekannten Rechenregeln sollen ja weiterhin gelten, daher ist das zulässig), wie zum Beispiel in

$$\frac{1}{2-3\mathrm{i}} = \frac{1}{2-3\mathrm{i}} \cdot \frac{2+3\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} = \frac{2+3\mathrm{i}}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}\mathrm{i}.$$

Aufgabe 12. *Dividieren leicht gemacht*

Vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}} =$$

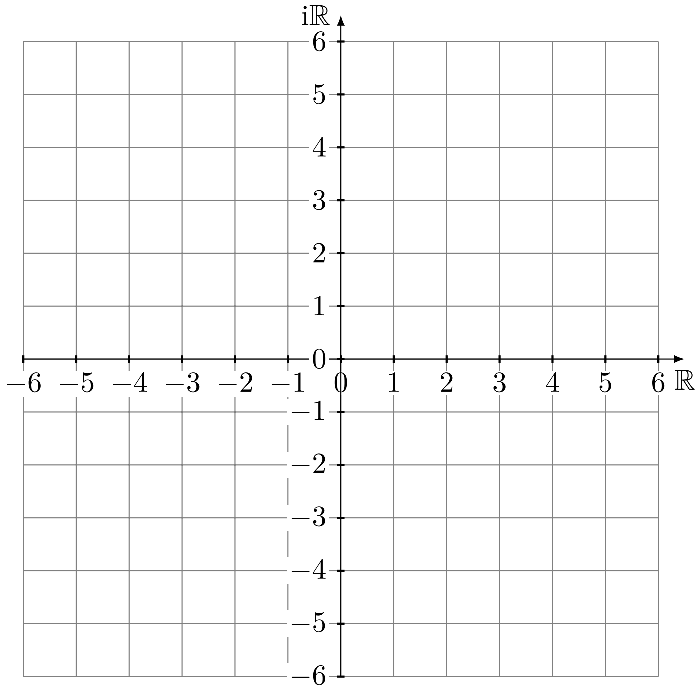
$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} =$$

$$\frac{3-2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} =$$

2.5 Nochmal Geometrie

Aufgabe 13. *Geometrische Transformationen*

Zeichne die Zahl $1 + 2\mathrm{i}$ in die Gaußsche Zahlenebene. Zeichne dann i und $\mathrm{i} \cdot (1 + 2\mathrm{i})$, $3\mathrm{i}$ und $3\mathrm{i} \cdot (1 + 2\mathrm{i})$, $1 + \mathrm{i}$ und $(1 + \mathrm{i}) \cdot (1 + 2\mathrm{i})$, sowie $\mathrm{i} - 3$ und $(\mathrm{i} - 3) \cdot (1 + 2\mathrm{i})$ ein und merke dir, welche Paare zueinander gehören. Fällt dir etwas auf, wenn du die Zahlen mit der Null verbindest?



Aus der letzten Aufgabe kann man sehen, dass die Multiplikation mit komplexen Zahlen Rotationen und Streckungen entspricht, ganz analog wie wir weiter vorne schon gesehen haben, dass i der Rotation um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn entspricht.

2.6 Aufgaben

Aufgabe 14. *Potenzen von* i

Berechne $\mathrm{i}^2, \mathrm{i}^3, \mathrm{i}^4, \ldots, \mathrm{i}^9$. Siehst du ein System?

Aufgabe 15. *Wurzeln von minus Vier*

Finde alle komplexen Zahlen $x \in \mathbb{C}$, die $x^2 + 4 = 0$ erfüllen.

Hinweis: Errate ein paar Kandidaten für x und rechne einfach die Probe. Wenn du eine Lösung gefunden hast, wirst du eine zweite auch bald entdecken.

Aufgabe 16. *Wurzeln von minus Zwei*

Finde alle komplexen Zahlen $x \in \mathbb{C}$, die $x^2 + 2 = 0$ erfüllen.

Aufgabe 17. *Nochmal Imaginärteil*

Berechne den Imaginärteil von $\frac{7-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$.

Aufgabe 18. ** Ordnung der komplexen Zahlen*

Man kann sagen, dass eine relle Zahl größer gleich einer anderen ist, zum Beispiel gilt $3 \leq 7$ oder $-4 \leq \frac{3}{2}$. Auf der Zahlengerade entspricht dies der Tatsache, dass 7 weiter rechts liegt als 3 beziehungsweise -4 weiter links liegt als $\frac{3}{2}$. Wir wollen schauen, ob wir das auch auf den komplexen Zahlen sagen können (also „weiter rechts“ auf der Gaußschen Zahlenebene erklären).

a) Angenommen wir haben eine reelle Zahl a mit $0 \leq a$ und wir multiplizieren a mit einer weiteren reellen Zahl $x \geq 0$. Was gilt dann für $a \cdot x$ und 0? Mache dir das anhand von Beispielen für a und x klar.

b) Angenommen wir haben eine reelle Zahl a mit $0 \leq a$ und wir multiplizieren a mit $x < 0$. Gilt dann $a \cdot x \geq 0$ oder $a \cdot x \leq 0$? Mache dir das anhand von Beispielen für a und x klar.

c) Kann $\mathrm{i} \geq 0$ sein? Kann $\mathrm{i} \leq 0$ sein?
Hinweis: Zeige, dass beides nicht gelten kann, wenn die beiden Regeln (a) und (b) immer noch gelten sollen. Also ist sowohl $\mathrm{i} \geq 0$ als auch $\mathrm{i} \leq 0$ falsch!