Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015

Vierter Zirkelbrief: Invarianten

Inhaltsverzeichnis

1 Erste Beispiele **1**

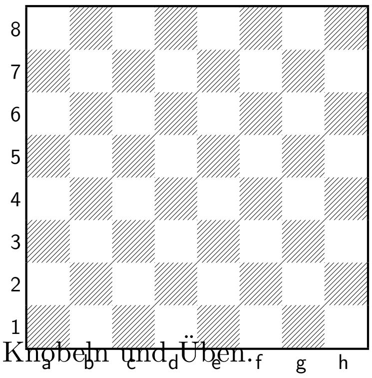
2 Der Satz von Euler **4**

2.1 Kurze Einführung in Graphen 4

2.2 Der Beweis des Eulerschen Polyedersatzes 5

3 Aufgaben **6**

1 Erste Beispiele



Eine Invariante ist irgendein Ding (zum Beispiel eine Zahl, ein Zustand oder eine Eigenschaft), die sich *nicht* verändert (zum Beispiel in der Zeit, unter Zügen oder Bewegungen).

Sowohl in der Mathematik als auch in der Physik untersucht man alle möglichen Objekte, indem man nach solchen Invarianten Ausschau hält. Diese helfen einem nämlich sehr oft, Fragen dazu zu beantworten. Wir werden hier zunächst ein paar Beispiele anschauen um danach den Eulerschen Polzedersatz für Graphen mittels einer Invariante zu beweisen. Im dritten Kapitel gibt es eine Aufgabensammlung zum weiteren Knobeln und Üben.

Aufgabe 1. *Füllen eines Schachbretts mit Dominos*

Kann man ein 8×8-Schachbrett mit 1×2-Dominos komplett füllen?

Vermutlich überdeckst du das Schachbrett auf eine sehr regelmäßige Art und Weise. Das funktioniert wunderbar, allerdings werden wir jetzt das Feld leicht verändern.

Aufgabe 2. *Füllen eines Schachbretts mit fehlender Ecke durch Dominos*

Kannst du ein 8×8-Schachbrett, von dem eine Ecke entfernt wurde, mittels 1×2-Dominos füllen?

Du sagst jetzt vermutlich so etwas wie „Nein, natürlich nicht ... die passen einfach nicht rein“. Das stimmt, aber wir wollen es etwas mathematischer formulieren, damit wir diese Idee später weiter verwenden können und auf schwierigere Situationen anwenden können.

Dazu suchen wir jetzt eine Invariante. Ein Schritt wird darin bestehen, dass wir einen Dominostein auf das Schachfeld legen und dadurch zwei Felder bedecken. Welche Zahl oder Eigenschaft verändert sich nicht, egal wie wir den Dominostein legen? Die Anzhl der verbleibenden Felder verändert sich: Am Anfang ist sie 63 (Eine Ecke wurde ja entfernt.) und nach einem Dominostein ist sie 61, danach 59 und so weiter. Wir sehen, dass dies alles ungerade Zahlen sind. Dies liegt daran, dass wir immer *zwei* Felder abdecken weshalb sich der Rest bei Division der Anzhl übriger Felder durch Zwei nicht ändert. Die Eigenschaft ob die Anzhl gerade oder ungerade ist, verändert sich also nicht, sie ist unsere Invariante. Nun sehen wir, dass sie am Anfang ungerade ist. Der gesuchte Endzustand – ein vollkommen bedecktes Feld – hat aber null verbleibende Felder. Null ist aber gerade, also können wir diesen Zustand nie erreichen. Das war jetzt eine komplizierte Methode zu begründen, dass am Ende halt ein Feld übrig bleibt.

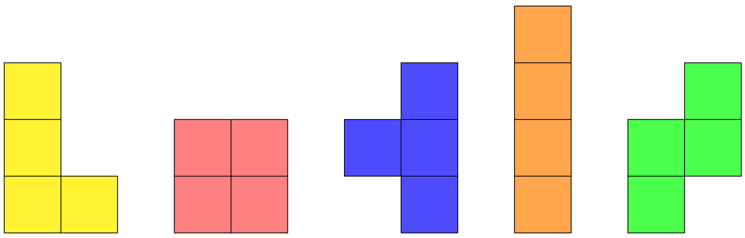
Aufgabe 3. *Jetzt fehlen zwei Ecken!*

Im oben abgebildeten Schachbrett fehlen jetzt zwei diagonal gegenüberliegende Ecken, sagen wir die Felder $a1$ und $h8$. Kann man dieses Feld mit 1×2-Dominos vollständig auslegen?

Die Idee von gerade eben hilft hier leider nicht weiter, weil im Anfangszustand eine gerade Anzahl von Feldern verfügbar ist und diese Zahl mit jedem neuen Domino gerade bleibt. Man sagt, dass die Invariante zu schwach ist.

Stattdessen können wir die Schachbrettmusterung nutzen. Ein Domino deckt immer ein weißes sowie ein schwarzes Feld ab, egal wie man ihn positioniert. Wenn wir also einen Domino hinlegen ändert sich die Differenz zwischen den Anzahlen der verbleibenden weißen und schwarzen Felder nicht – beide Zahlen werden ja um eins verringert. Am Anfang gibt es $\frac{64}{2} = 32$ weiße sowie $\frac{64}{2} - 2 = 30$ schwarze Felder. Das heißt die Differenz von den verbleibenden schwarzen und weißen Feldern ist $32 - 30 = 2$. In jedem Schritt – also dem Hinzufügen eines Dominosteins – verändert sich diese Zahl nicht. Am Ende müsste es aber null verbleibende schwarze und weiße Felder geben, die Differenz wäre also Null. Dementsprechend kann man ein solches Feld *nicht* mit Dominos vollständig auslegen.

Nun schauen wir uns ein neues Problem an. Hier siehst du die fünf verschiedenen Formen, die beim Spiel Tetris auftreten. Analog zu Pentominos, nennt man diese Figuren *Tetrominos*.

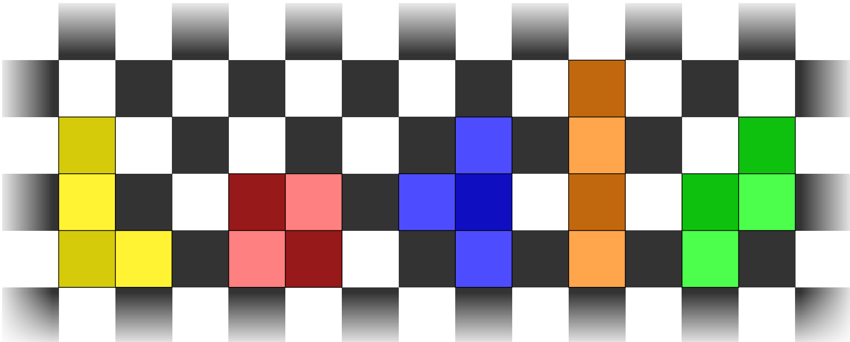


Aufgabe 4. *Tetrominos im Rechteck*

Ist es möglich, aus den obigen fünf Figuren ein Rechteck zu legen? Dabei dürfen sich die Figuren nicht überlappen, aber beliebig oft gedreht oder gespiegelt werden.

Zunächst einmal stellen wir fest, dass die fünf Figuren insgesamt $5 \cdot 4 = 20$ Felder belegen. Also muss das Rechteck, falls es existiert, entweder 1 Feld breit und 20 Felder lang oder 2 Felder breit und 10 Felder lang oder 4 Felder breit und 5 Felder lang sein. Offensichtlich scheidet die erste Möglichkeit aus. Man kann sich auch recht schnell überlegen, dass auch die zweite Möglichkeit nicht in Frage kommt (Tipp: platziere das orange Teil zuerst). Somit bleibt nur das 5×4-Rechteck als Möglichkeit übrig. Wenn wir aber versuchen, solch ein Rechteck mit obigen Figuren zu belegen, scheitern wir immer wieder. Das hat auch einen Grund:

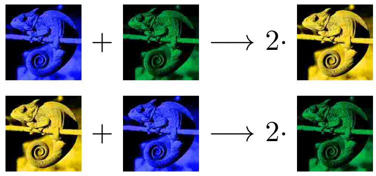
Es ist nicht möglich, aus den Tetris-Figuren ein Rechteck zu legen. Wir legen die Figuren auf ein Schachbrett:



Nun fällt etwas auf: Alle Figuren bis auf die blaue belegen je zwei weiße und zwei schwarze Felder (egal, wie man sie hinlegt). Die blaue Figur, jedoch, belegt drei weiße Felder und nur ein schwarzes Feld (oder umgekehrt). Damit belegen die Figuren zusammengenommen ungleich viele weiße wie schwarze Felder, egal wie man sie anordnet. Damit kann man insbesondere kein 4×5-Rechteck mit ihnen legen, denn jedes 4×5-Rechteck auf einem Schachfeld hat gleich viele weiße und schwarze Felder. Auch hier können wir wieder als Invariante die Differenz zwischen verbleibenden weißen und schwarzen Feldern benutzen um einen Widerspruch zu finden.

Aufgabe 5. *Viele Chamäleons auf einer Insel*

Auf einer Insel leben 345 gelbe, 346 grüne und 347 blaue Chamäleons. Wann immer sich zwei Chamäleons gleicher Farbe begegnen, passiert nichts. Wenn sich aber zwei Chamäleons unterschiedlicher Farbe begegnen, so nehmen beide die dritte Farbe an. Beispielsweise hätten wir nach einem Treffen eines gelben und einer grünen Chamäleons nur noch 344 gelbe, 345 grüne, aber dafür 349 blaue Chamäleons. Frage: Ist es möglich, dass zu einem Zeitpunkt genau gleich viele Chamäleons jeder Farbe auf der Insel leben?



Grundsätzlich könnte diese Situation eintreten, da $345+346+347=1038$ durch 3 teilbar ist. Wenn wir allerdings versuchen, eine Liste von Begegnungen zu erstellen, sodass nach diesen Begegnungen die Anzahl der Chamäleons jeder Farbe gleich ist, scheitern wir.

Es ist nicht möglich, dass es irgendwann gleich viele Chamäleons von jeder Farbe gibt. Wir betrachten die Zahl C, die wir als Differenz zwischen der Anzahl der blauen und grünen Chamäleons festlegen. Zu Beginn ist $C = 347 - 346 = 1$. Wenn sich ein blaues und ein grünes Chamäleon treffen, so bleibt diese Zahl gleich. Wenn sich allerdings ein grünes und ein gelbes Chamäleon treffen, so nimmt die Zahl der grünen Chamäleons um eins ab, während die Zahl der blauen um zwei steigt. Insgesamt erhöht sich C um drei. Wenn sich ein blaues und ein gelbes Chamäleon treffen, so sinkt C um drei (mit ähnlicher Begründung). Die Zahl C ist also nicht invariant. Aber wir stellen fest: Zu Beginn ist C gleich 1, also nicht durch 3 teilbar. Wir wissen auch, dass wenn eine ganze Zahl k durch 3 teilbar ist, so sind auch die Zahlen $k+3$ und $k-3$ durch 3 teilbar. Umgekehrt sind, wenn k nicht durch 3 teilbar ist, auch die Zahlen $k+3$ und $k-3$ nicht durch 3 teilbar. Also können wir folgern, dass nach jedem Treffen von zwei Chamäleons unsere Zahl immer noch *nicht* durch 3 teilbar ist. Unsere Invariante ist hier also nicht die Zahl C selbst, sondern die Tatsache, dass C nicht durch 3 teilbar ist. In der gewünschten Endsituation wäre $C = 0$, da wir verlangen, dass die Zahl der blauen und grünen Chamäleons dann gleich ist. Aber 0 ist durch 3 teilbar! Folglich kann diese Situation nicht erreicht werden.

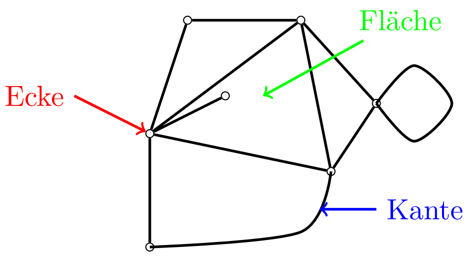
2 Der Satz von Euler

2.1 Kurze Einführung in Graphen

Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten wie du im folgenden Bild siehst. Eine Kante muss dabei zwischen zwei Ecken verlaufen und darf nicht „im Nirgendwo“ enden. Mit Flächen bezeichnet man von Kanten umschlossene innere Gebiete. Wir fordern zwei Eigenschaften:

(i) Der Graph muss *zusammenhängend* sein. Das heißt, dass man von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke entlang eines Weges von Kanten gehen kann.

(ii) Der Graph muss *planar* sein. Für uns bedeutet das, dass sich Kanten nur in Ecken treffen dürfen. Sonst wäre nicht sofort klar wieviele Flächen zum Beispiel das Haus des Nikolaus eigentlich hat.



Außerdem ist wichtig für uns, dass wir die äußere Fläche mitzählen, der Graph oben hat also 7 Ecken, 11 Kanten und 6 Flächen.

Man könnte jetzt denken, dass die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen bei einem solchen Graphen unabhängig voneinander wären. Tatsächlich können wir sie aber nicht beliebig wählen, denn es gilt der sogenannte *Eulersche Polyedersatz*.

Satz. Eulerscher Polyedersatz Für einen zusammenhängenden planaren Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gilt

$$e - k + f = 2.$$

2.2 Der Beweis des Eulerschen Polyedersatzes

Wir wollen nun den Eulerschen Polyedersatz beweisen, indem wir die Größe $e - k + f$ als Invariante auffassen. Dazu „bauen“ wir einen beliebigen (zusammenhängenden planaren) Graphen schrittweise auf und beweisen, dass sich in jedem solchen Zug diese Zahl nicht ändert, sie ist also eine Invariante.

Beweis. Ein beliebiger solcher Graph kann „gebaut“ werden, indem man von einem sehr einfachen Graphen ausgeht und wiederholt die Züge I und II anwendet. Dieser einfachste Graph sieht aus wie folgt:

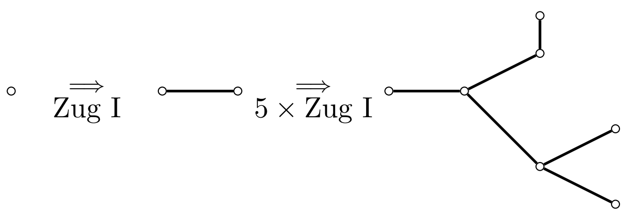
$$\circ$$

Dieser Graoh besteht also nur aus einer Ecke und damit insbesondere nicht zu vielen Objekten.[1] Insgesamt sehen wir, dass in diesem Graphen $e = 1, k = 0$ und $f = 1$[2] gilt. Also gilt

$$e - k + f = 2.$$

Wie erhalten wir nun beliebige Graphen? Nun, als erstes müssen wir die Ecken kreieren und danach bleiben noch Kanten übrig. Wir betrachten

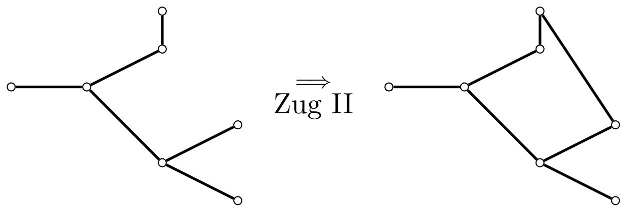
a) Zug I: Füge eine neue Ecke zusammen mit einer Kante zu einer bereits existierenden Ecke hinzu.



b) Zug II: Füge eine Kante zwischen zwei bereits existierenden Ecken hinzu. Dabei erlauben wir auch, dass diese beiden Eken in Wirklichkeit die gleiche sind. Dadurch können wir auch Kanten hinzufügen, die an der Ecke beginnen, wo sie auch enden.

[1]Da wir von diesem Graphen starten wollen, müssten wir alle Kanten und Ecken, die im zu bauenden Graphen nicht vorkommen, wieder entfernen. Ein Schritt des Entfernes ist jedoch etwas komplizierter, weil man zum Beispiel nicht-zusammenhängende Graphen erhalten könnte.

[2]Die äußere Fläche zählt mit!



Aufgabe 6. *Graphenbauen*

Überzeuge dich davon, dass diese beiden Züge ausreichen, um beliebige Graphen aufzubauen. Finde dazu einen Algorithmus[3], wie du einen gegebenen Graphen konstruieren kannst.

Jetzt schauen wir uns an, was in beiden Zügen mit der Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen passiert.

a) Zug I: Da wir eine Ecke und eine Kante hinzufügen erhöhen sich e und k um 1. Die neue Ecke liegt in einer bereits existierenden Fläche, welche nicht weiter geteilt wird. Das heißt, dass sich die Anzahl der Flächen nicht verändert. Insgesamt ändert sich $e - k + f$ *nicht*, weil e und k verschiedene Vorzeichen haben und sich dadurch die $+1$ aufheben.

b) Zug II: Hier erhöht sich die Anzahl der Kanten um 1 und die Anzahl der Ecken bleibt konstant. Die Kante muss in einer bereits existierenden Fläche liegen[4] und teilt diese damit in zwei neue Flächen. Das heißt, jedes Mal wenn wir Zug II ausführen erhöht sich die Anzahl der Flächen um 1. Insgesamt sehen wir, dass sich $e - k + f$ wieder nicht ändert, weil k und f verschiedene Vorzeichen haben und sich dadurch die $+1$ aufheben.

Jetzt haben wir also bewiesen, dass sich jeder Graph aus dem einfachsten Graphen mit nur einer Ecke durch Zug I und II erreichen lässt, dass sich $e - k + f$ bei Zug I und II nicht ändert und dass für den Startgraphen $e - k + f = 2$ gilt. Damit haben wir bewiesen, dass für alle solchen Graphen $e - k + f = 2$ gilt. □

3 Aufgaben

Hier ist noch eine Sammlung von Aufgaben mit einigen Tipps. Leider sind Aufgaben zu diesem Thema immer so, dass man schon eine zündende Idee für eine geeignete Invariante haben muss. Versucht daher herauszufinden, was sich verändert beziehungsweise was gleich bleibt. Viel Spaß beim Knobeln!

Aufgabe 7. *Eine Tafel Schokolade*

Fritz möchte eine rechteckige 4×5-Tafel Schokolade möglichst schnell in einzelne Felder trennen. Dabei kann er nur gerade entlang der Sollbruchstellen teilen. Außerdem kann er nicht zwei Schokoladenteile[5] gleichzeitig abknicken, also muss er zum Beispiel eine 2×2-Tafel mindestens dreimal trennen. Wie kann Fritz die 4×5-Tafel möglichst schnell in Einzelteile zerlegen?

[4] Hier geht die angenommene Planarität des Graphen ein.

Bemerkung. Versuche doch ein paar Mal, die Tafel auf verschiedene Art und Weisen zu zerteilen. Was stellst du fest? Fällt dir eine Größe ein, die du „berechnen" kannst von einer bereits teilweise zerlegten Tafel Schokolade? Die Invariante ist hier nicht wirklich unveränderlich, sondern eher eine Größe, die sich auf eine ganz bestimmte einfache Art und Weise verändert.

Aufgabe 8. *Das Hunderterspiel*

Marla und Egon spielen das Hunderterspiel. Dabei sagen beide abwechselnd eine natürliche Zahl von 1 bis 9. In jedem Schritt wird die neue Zahl zu den bisherigen dazu addiert. Gewonnen hat, wer als erstes mit seiner gesagten Zahl die 100 erreicht. Marla beginnt. Findest du eine Strategie, so dass Marla gewinnt, egal wie gut Egon spielt?

Aufgabe 9. *Der hundertköpfige Drache*

Ein Drache hat 100 Köpfe. Ein Ritter kann jeweils auf einen Streich $15, 17, 20$ oder 5 Köpfe abschlagen – dann wachsen aber jeweils $24, 2, 14$ beziehungsweise 17 Köpfe nach. Kann der Ritter alle Köpfe des Drachen abschlagen?

Aufgabe 10. *Nochmal der Ritter und der Drache*

Auf einem rechteckigen karierten Papier spielen der Ritter und der Drache folgendes Spiel: Die beiden ziehen abwechselnd, der Ritter beginnt. Ein Zug besteht darin, von einem Kästchen eine waagerechte oder senkrechte Kante einzufärben — der Ritter verwendet blau, der Drache grün. Ziel des Ritters ist es, eine geschlossene blaue Kurve zu erzeugen; Ziel des Drachen ist es, dies zu verhindern. Wer gewinnt?

Aufgabe 11. *Das Plus–Minus-Spiel*

Gegeben seien zehn beliebige natürliche Zahlen, die in einer Reihe stehen. Petra und Maximilian dürfen abwechselnd immer ein Plus- oder Minuszeichen zwischen die Zahlen schreiben. Klammern gibt es nicht. Petra gewinnt, wenn am Ende nach der Rechnung eine gerade Zahl herauskommt, Maximilian gewinnt, wenn diese Zahl ungerade ist. Wer gewinnt? Wovon hängt der oder die Siegerin ab?

Aufgabe 12. *Einhundert Zahlen auf der Tafel*

Auf einer Tafel stehen nebeneinander die natürlichen Zahlen von 1 bis 99. In jedem Schritt wählt man zwei Zahlen a und b von denen, die an der Tafel stehen, entfernt diese von der Tafel und schreibt dafür $|a - b| =$ Abstand zwischen a und b. Also zum Beispiel kann man 3 und 94 wählen, streicht diese und fügt stattdessen eine (zusätzliche) 91 hinzu. Beweise, dass am Ende immer eine ungerade Zahl übrig bleibt.

Aufgabe 13. *Sechs Zahlen im Kreis*

Im Kreis stehen sechs Zahlen und zwar am Anfang $1, 0, 1, 0, 0, 0$. In einem Zug kann man zwei benachbarte Zahlen um 1 erhöhen.[6] Kann man auf diese Art und Weise erreichen, dass überal die gleiche Zahl steht?