Hackenbusch und Spieltheorie

Was sind Spiele?

Definition. Ein *Spiel* besteht für uns aus

- zwei *Spielern*,
- *Positionen* oder *Stellungen*, in welchen sich das Spiel befinden kann (insbesondere eine besondere *Startposition*) und
- klar definierten *Regeln*, welche die möglichen *Züge* festlegen.

Außerdem fordern wir, dass beide Spieler abwechselnd ziehen.

Im Folgenden sind ein paar mögliche Eigenschaften von Spielen zusammen mit Beispielen und Nicht-Beispielen zusammengefasst. Wenn man über Spiele diskutiert, muss man sich immer klarmachen, ob diese in eine der folgenden Kategorien passen.

Eigenschaft	Erklärung	Beispiel	Nicht-Beispiel
Vollständige Informationen	Alle Spieler kennen den gesamten Spielzustand, d.h. es gibt keine verdeckten Informationen.	Nim, Schach	Poker, Bridge, Schiffe versenken
Kein Zufall	Es gibt kein zufälliges Element.	Tic-Tac-Toe, Schiffe versenken	Monopoly, Poker, Schlangen-und-Leitern
Normales Spiel	Der Spieler, der als erstes nicht mehr ziehen kann, verliert.	Nim, Hackenbusch	(Spiele mit Punkten), Schach (Patt!)
Endlich	Das Spiel hört immer (!) nach einer endlichen Zahl von Zügen auf.	Schach, Nim	Poker
Neutral	In einer gegebenen Position haben beide Spieler die gleichen Zugmöglichkeiten	Nim, Käsekuchen	Schach, Viergewinnt

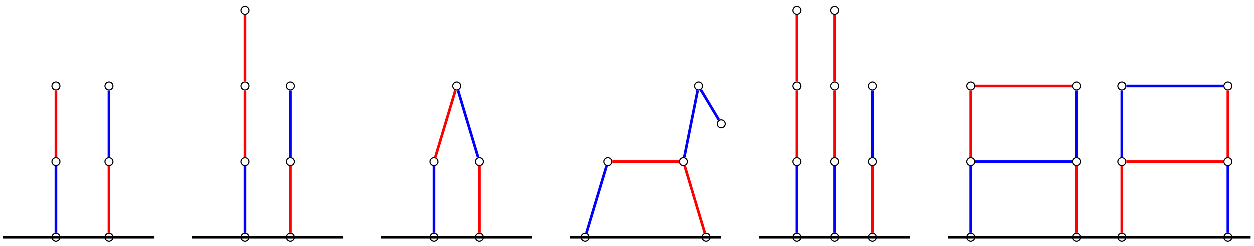
Hackenbusch

Hackenbusch ähnelt Nim, weil es auch um das abwechselnde Entfernen von Kanten oder Steinen geht. Die Regeln sind wie folgt:

- Es gibt einen *Boden* sowie beliebige aufeinander gestellte *Kanten* von zwei Farben, Blau und Rot.
- Der *linke Spieler* darf nur blaue Kanten entfernen und der *rechte Spieler* nur die roten.
- Die beiden Spieler ziehen abwechselnd und müssen pro Zug genau eine Kante ihrer Farbe entfernen.
- Wenn Kanten nicht mehr mit dem Boden verbunden sind, werden diese entfernt.
- Derjenige Spieler verliert, der als erstes nicht mehr ziehen kann.

Damit ist Hackenbusch ein Spiel mit **vollständigen Informationen**, **ohne Zufall**, **normal** und **endlich**, aber **nicht symmetrisch**.

Aufgabe 1. Versuche *Gewinnstrategien* (d.h. Strategien für einen der Spieler, so dass dieser immer gewinnt, unter der Annahme, dass der Gegner perfekt spielt) für die folgenden Positionen zu finden:



Bewertungen von Stellungen

Notation

Ganz allgemein wollen wir zwei Notationen einführen:

Definition. Sei ein Spiel in unserem Sinne gegeben.

1. Eine Stellung wird wie folgt beschrieben:

$$\{\text{Zugmöglichkeiten des linken Spielers} \mid \text{Zugmöglichkeiten des rechten Spielers}\}$$

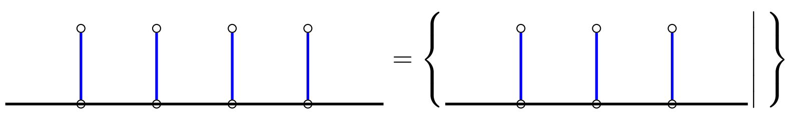
2. Eine Stellung wird mit einer Zahl *bewertet*. Diese Zahl gibt an, wieviele Züge der linke (!) Spieler im Vorteil ist.

Bemerkung. Wenn wir eine Stellung wie oben beschreiben wollen, nehmen wir für die linken Spielzüge an, dass links am Zug ist und für die rechten Zugmöglichkeiten, dass rechts am Zug ist. Das heißt, wir beschreiben die Stellung unabhänging davon, wer eigentlich am Zug ist, damit alle Informationen enthalten sind.

Erste Beispiele

Die einfachste Hackenbusch-Position ist die in der keine Kante mehr vorhanden ist. Das heißt, dass derjenige Spieler, der beginnt, sofort verliert. Da niemand eine Zugmöglichkeit hat, wird diese Stellung mit $\{ \mid \}$ bezeichnet und hat den Wert 0. Wir schreiben $0 = \{ \mid \}$.

Wenn n blaue Kanten einzeln am Boden stehen und keine rote Kante vorhanden ist, kann der linke Spieler nur auf $n-1$ blaue Kanten ziehen und der rechte hat keine Zugmöglichkeit. Anstatt die Position mit vielen Bildern zu bezeichnen, wollen wir direkt die Werte der durch Züge von links oder rechts erreichbaren Stellungen notieren.



Wieviele Züge ist Blau im Vorteil gegenüber Rot? Um auf ein Nullspiel (Stellung mit Bewertung 0) zu kommen, müssen wir Rot n einzelne rote Kanten geben, denn dann ist klar, dass der anziehende Spieler immer verliert. Also ist die Stellung n wert. Da dementsprechend die Stellung mit $n-1$ einzelnen blauen und keinen roten Kanten $n-1$ wert ist, können wir schreiben

$$n = \{n-1 \mid \},$$

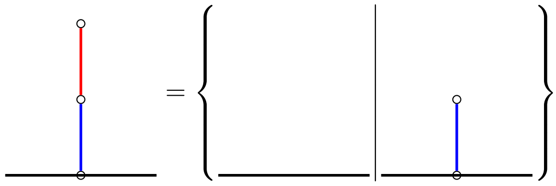
also insbesondere $0 = \{ \mid \}$, $1 = \{0 \mid \}$, $2 = \{1 \mid \}$, ...

Aufgabe 2. Welchen Wert haben $\{ \mid 0\}$, $\{ \mid -1\}$, $\{ \mid -2\}$, ...? Welchen Stellungen in Hackenbusch entsprechen diese Werte?

Aufgabe 3. Welchen Wert haben die Stellungen mit n einzelnen blauen Kanten und n einzelnen roten Kanten? Finde sowohl deren Wert als auch eine Beschreibung der Zugmöglichkeiten.

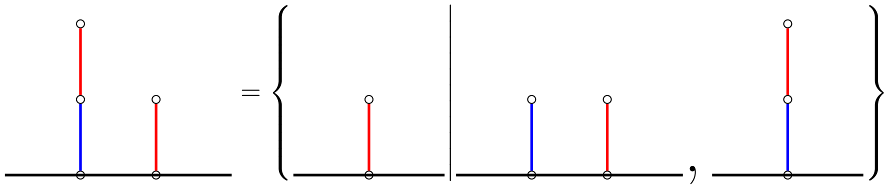
Weitere Beispiele

Nicht alle Stellungen können mit ganzen Zahlen bewertet werden, tatsächlich benötigen wir irgendwann vollkommen andere Zahlen. Da es im folgenden nur jeweils eine Zugmöglichkeit gibt, sehen wir



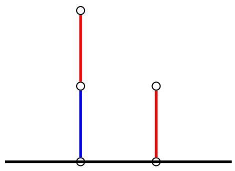
$= \{0 \mid 1\}$

Was ist die Bewertung von $\{0 \mid 1\}$? Sicherlich ist die Stellung ein Vorteil für links, also erwarten wir eine positive Bewertung $\{0 \mid 1\} > 0$. Wenn wir eine rote Kante hinzufügen erhalten wir



$= \{-1 \mid 0, \{0 \mid 1\}\} = ?$

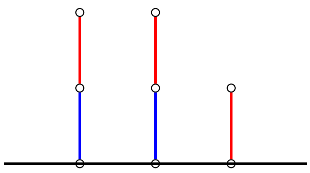
Wir sehen auch ohne die obige Rechnung, dass egal wer beginnt, Rechts immer eine Gewinnstrategie hat (Welche?), das heißt



< 0

Versuchen wir einmal zwei der $\{0 \mid 1\}$-Stellungen mit $\{\ \mid 0\}$ zu vergleichen.

Aufgabe 4. Zeige, dass die folgende Stellung eine Nullstellung ist, das heißt, dass der anziehende Spieler sicher verliert (wenn beide Seiten perfekt spielen).



Mit dieser Aufgabe haben wir gezeigt, dass

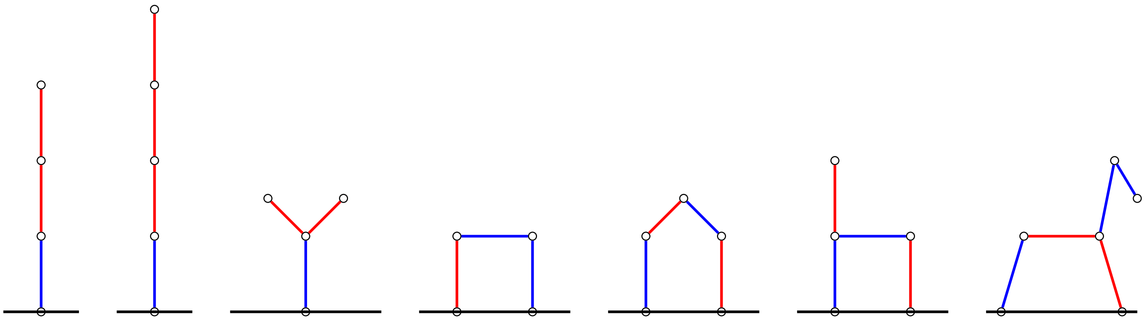
$$\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} - 1 = 0$$

und damit $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$. Das heißt, dass eine rote Kante auf einer blauen Kante auf dem Boden einen halben Zug Vorteil für Links ist.

Bemerkung. Hier haben wir benutzt, dass wenn wir zwei Hackenbusch-Haufen zusammen als ein Spiel betrachten, sich deren Bewertungen addieren! Außerdem können wir uns die Betrachtung einiger Unterfälle ersparen: Da jeder Spieler optimal spielt, reicht es, für jeden Spieler nur die jeweils besten Züge zu betrachten. Das heißt, dass der linke Spieler möglichst hohe Bewertungen will und der rechte möglichst niedrige. Zum Beispiel gilt für die obigen Bewertungen $\{-1 \mid \{0 \mid 1\}, 0\} = \left\{-1 \middle| \frac{1}{2}, 0\right\} = \{-1 \mid 0\} = -\frac{1}{2}$.

Analog können wir jetzt vorgehen um noch mehr "einfache" Situationen zu bewerten:

Aufgabe 5. Finde Bewertungen für die folgenden Hackenbuschstellungen (Versuche dich an der letzten nicht zu lange):



Aufgabe 6. Überlege dir, warum $n + \frac{1}{2} = \{n|n+1\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ (also auch die negativen Zahlen!) gilt.

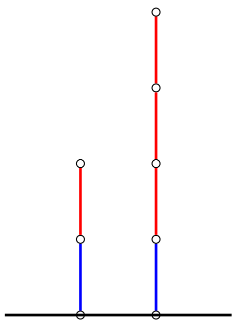
Aufgabe 7. Bezeichne mit G_L bzw. G_R die Zugmöglichkeiten des linken bzw. rechten Spielers und nehme an, dass $p = \{G_L \mid G_R\}$ gilt. Überzeuge dich davon, dass dann $-p = \{-G_R \mid -G_L\}$ gilt.

Ein Beispiel zur Addition

Bevor wir das Hauptprinzip für Bewertungen kennenlernen, schauen wir uns noch ein Beispiel an um ein wenig Übung zu bekommen.

Aufgabe 8. Analog zum Anfang von Aufgabe 5, was ist die Bewertung für einen Hackenbuschturm aus einem blauen und n roten aufeinander gestapelten Kanten? Schreibe außerdem die jeweils besten Züge der Spieler auf.

Jetzt wollen wir einmal $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$ addieren, also



bewerten. Wir haben

$$\frac{5}{8} = \{0 \mid 1\} + \left\{0 \middle| \frac{1}{4}\right\}.$$

Egal welcher Spieler dran ist, er kann nur links oder rechts ziehen, muss also den anderen Haufen gleich lassen. Links kann auf $0 + \frac{1}{8}$ (durch links ziehen) oder auf $\frac{1}{2} + 0$ (durch rechts ziehen) kommen. Da $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$ ist, sollte Links im rechten Haufen ziehen.

Rechts kann durch Ziehen links auf $1 + \frac{1}{8}$ oder rechts auf $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ kommen. Da $\frac{3}{4} < \frac{5}{8}$ ist, ist es besser für Rechts rechts zu ziehen. Erinnere dich daran, dass für den rechten Spieler *niedrigere* Zahlen besser sind. Insgesamt sehen wir

$$\frac{5}{8} = \left\{\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{4}\right\}.$$

Analog kann man sich überlegen

Aufgabe 9. Zeige für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{ \frac{2p}{2^{n+1}} \,\middle|\, \frac{2p+2}{2^{n+1}} \right\} = \left\{ \frac{p}{2^n} \,\middle|\, \frac{p+1}{2^n} \right\}.$$

Ein komplizierterer Fall

Wenn man die Bewertung $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$ anschaut, könnte man denken, dass die Bewertung immer genau der Mittelwert aus den (jeweils) besten Zügen ist. Das ist aber nicht richtig!

Betrachte dazu $X = \left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\}$. Es stellt sich heraus, dass $X = \frac{3}{2}$ ist.

Proposition. *Es gilt* $\frac{3}{2} = \left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\}$.

Proof. Wir wissen bereits, dass $\frac{3}{2} = \{1|2\}$ gilt. Das heißt, wir müssen beweisen, dass

$$X + \left(-\frac{3}{2}\right) = \left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\} + \{-2 \mid -1\} = 0$$

gilt. Wie würde der linke Spieler anfangen? Wenn er in X zieht, zieht er auf $\frac{5}{4} - \frac{3}{2} < 0$, was eine Verlustposition für ihn ist. Wenn der rechte Spieler zuerst dran ist und er in X zieht, hat das Spiel eine Wertung von $2 - \frac{3}{2} > 0$, was wiederum für ihn eine Verlustposition ist. Also würden beide Spieler zunächst im rechten Spiel ziehem.

Wenn Links dort beginnt, ist die Stellung $X + (-2)$, woraufhin Rechts in X zieht und ein Nullsummenspiel entsteht mit $2 - 2 = 0$. Da nun Links dran ist, gewinnt also Rechts.

Wenn Rechts dort beginnt, ist die Stellung $X + (-1)$, woraufhin Links in X auf $\frac{5}{4} - 1 > 0$, also eine Gewinnstellung für ihn, ziehen kann. Damit gewinnt in dem Fall Links.

Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass $X - \frac{3}{2}$ ein Nullsummenspiel ist (der anziehende Spieler verliert immer) und damit

$$\left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\} = \frac{3}{2},$$

was insbesondere nicht dem Durchschnitt der beiden Züge entspricht. □

Der allgemeine Fall

Schauen wir uns noch mal das Beispiel von eben an, also

$$\frac{3}{2} = \left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\} =: X.$$

Angenommen, wir haben eine Vermutung, was X ist und dass wir bereits eine (andere) Darstellung von diesem Wert haben, also $X = \{a \mid b\}$. Dann würden wir die folgende Gleichung nachweisen wollen um zu beweisen, dass $\left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\} = X$ gilt. Es muss

$$\left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\} + (-X) = \left\{ \frac{5}{4} \middle| 2 \right\} + \{-b \mid -a\} = 0$$

sein. Analysieren wir doch einfach mal, was aus dieser Gleichung folgen würde.

Wenn Links am Zug ist, kann er auf eine Stellung mit Wert $\frac{5}{4} - X$ oder $X - b$ ziehen. Damit er nicht auf eine Gewinnstellung für ihn selbst ziehen kann (Das gesamte Spiel muss ja ein Nullsummenspiel sein), müssen beide Werte negativ sein. Null würde nicht ausreichen, weil ja danach der rechte Spieler dran ist. Also muss $\frac{5}{4} < X$ und $b > X > \frac{5}{4}$ gelten.

Wenn Rechts am Zug ist, kann er auf eine Stellung mit Wert $2 - X$ oder $X - a$ ziehen. Damit er nicht auf eine Gewinnstellung für ihn selbst ziehen kann (Das gesamte Spiel muss ja ein Nullsummenspiel sein), müssen beide Werte positiv sein. Null würde nicht ausreichen, weil ja danach der linke Spieler dran ist. Also muss $X < 2$ und $a < X < 2$ gelten.

Ein interessanter Punkt ist, dass dies zeigt, dass für alle Zahlen x und y gilt $x < \{x \mid y\} < y$. Daneben sehen wir, dass wenn wir eine konkrete Vermutung für X haben, deren Optionen (also a und b für $X = \{a \mid b\}$) in $\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\}$ *passen* müssen. Wir wollen sagen, dass ein Wert X für eine Stellung $\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$ passt, genau dann wenn $a, b, c, \ldots < X < d, e, f, \ldots$ für alle Optionen der Stellung gilt.

Es ist anschaulich klar, dass wir auf diese Weise nur Gleichungen mit Werten X beweisen können, für welche wir bereits eine solche Darstellung $X = \{a \mid b\}$ haben, denn sonst wissen wir gar nicht wo wir anfangen sollten. Das heißt, dass wir von den einfachsten Stellungen ausgehen müssen und dann induktiv kompliziertere Stellungen bewerten müssen. Wir beginnen mit den folgenden uns bereits bekannten Regeln:

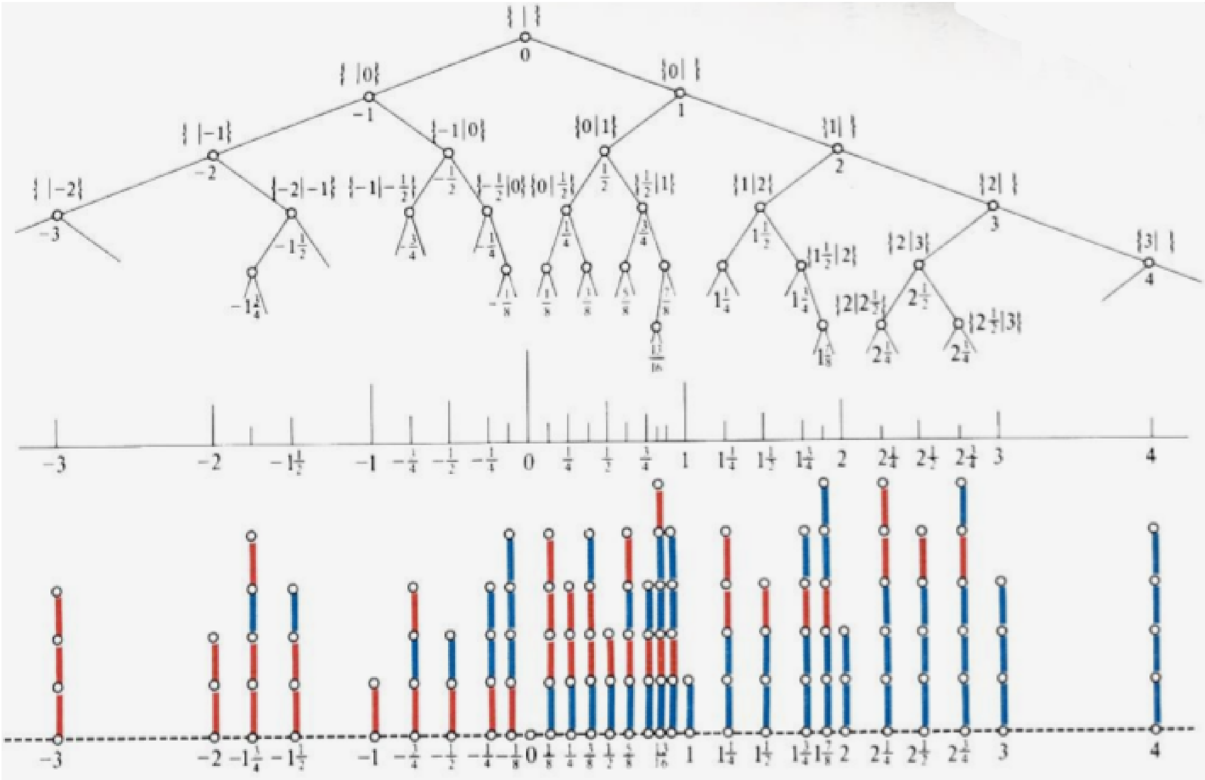
1. $0 = \{ \mid \}$
2. $n + 1 = \{n \mid \}$ für $n \in \mathbb{N}$
3. $-n - 1 = \{ \mid -n\}$ für $n \in \mathbb{N}$
4. $\frac{2p+1}{2^{q+1}} = \left\{\frac{p}{2^q}\middle|\frac{p+1}{2^q}\right\}$ für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

Wir setzen die Nummerierungen der sogenannten *Generationen* wie folgt fort. Alle Stellungen, deren Werte mit den ersten n Generationen durch die obigen Überlegungen bestimmt werden können, bilden die $n + 1$-te Generation. Außerdem nennen wir eine Zahl *einfacher* als eine andere, wenn sie in einer früheren Generation erzeugt wurde.

Nun wollen wir $\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + (-Y) = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + \{-b \mid -a\} = 0$ mit unserem Versuch $Y = \{a \mid b\}$ für $X = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\}$ spielen. Links kann links auf $\frac{5}{4} - Y$ und rechts auf $X - a$ ziehen und Rechts auf $2 - Y$ oder $X - a$. Wir wissen aber bereits, dass Y zwischen $\frac{5}{4}$ und 2 liegen muss, was bedeutet, dass beide Spieler nicht in X (also links) ziehen wollen. Das heißt aber, dass um unseren Tipp Y zu verifizieren, wir erstmal die Spiele $\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} - a$ und $\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} - b$ spielen müssen. Da wir dazu aber a und b als konkrete Stellungen $\{a_1 \mid a_2\}$ und $\{b_1 \mid b_2\}$ darstellen müssen, sind wir gezwungen, die gleiche Rechnung noch einmal für einfachere Zahlen zu machen. Dies ist dann solange nötig bis die Optionen a_1, a_2, b_1 und b_2 dann sofort zeigen, dass $X - a_2$ für Links verloren ist, etc., wir also ein Nullspiel erhalten. Dann haben wir aber gezeigt, dass z.B. $X + (-\{a_2 \mid a_1\}) = 0$ gilt und damit X berechnet, weil $\{a_1 \mid a_2\}$ so einfach ist, dass wir seinen Zahlenwert kennen. Dies führt auf die *Einfachheitsregel*

Satz. *Sei $\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$ eine Stellung, so dass eine Zahl existiert, die passt. Dann ist die Bewertung der Stellung die einfachste Zahl, die passt.*

Auf der folgenden Seite siehst du eine Übersicht über die einfachsten Zahlen. Dabei hat der Graph einen Ursprung oben und eine Zahl ist umso einfacher, desto weiter oben sie ist.



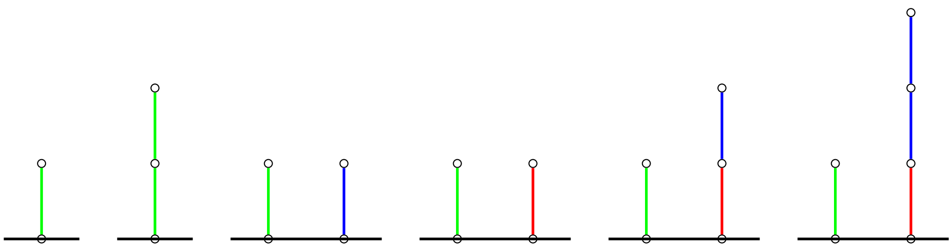
Aufgabe 10. Versuche jetzt, den Wert für das Pferd in Aufgabe 5 zu bestimmen, indem du alle möglichen Züge durchgehst, alle möglichen Stellungen bewertest (Wende dazu die Einfachheitsregel an!) und dir so langsam das Pferd zusammen baust. Es ist sehr effizient, an einer Kante in einer Skizze den Wert der Stellung zu schreiben, wenn man diese Kante entfernen würde.

Nimbers und neutrales Hackenbusch

Im Folgenden führen wir *grüne* Kanten zusätzlich ein mit der folgenden Regel.

- Grüne Kanten dürfen von beiden Spielern entfernt werden. Sie sind also neutral.

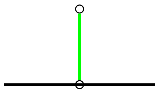
Betrachten wir jetzt einmal die folgenden Situationen.



Wie man schnell merkt, gewinnt bei einem einzelnen grünen Stapel der anziehende Spieler, indem er einfach alle Kanten wegnimmt. Das heißt, dass der *anziehende Spieler immer gewinnt*, dies ist also kein Nullsummenspiel! Schaut man sich jetzt die mittleren beiden Spiele an, sieht man $-1 < X < 1$, wenn X eine einzelne grüne Kante bezeichnet. Von den letzten beiden Stellungen sieht man aber $-\frac{1}{2^n} < X < \frac{1}{2^n}$

für alle $n \in \mathbb{N}$ indem man immer höhere Türme betrachtet und die Farben invertiert. Daraus folgt normalerweise $X = 0$ (Warum?) aber wir wissen bereits $X \neq 0$.

Die Lösung dafür ist, dass wir eine neue "Zahl" einführen, und zwar

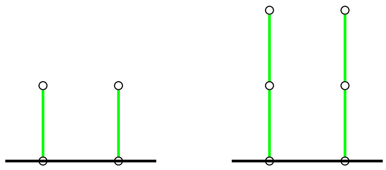
$\star :=$  $= \{\underline{\qquad} \mid \underline{\qquad}\} = \{0 \mid 0\}.$

Außerdem definieren wir rekursiv $\star 0 := 0 = \{ \mid \}$, $\star 1 := \star$ und $\star n := \{\star 0, \star 1, \star 2, \ldots, \star(n-1) \mid \star 0, \star 1, \star 2, \ldots, \star(n-1)\}$.

Aufgabe 11. Welche Stellung entspricht den $\star n$?

Wegen der letzten Aufgabe ist $\star n$ die Berwertung der Stellung, die aus n grünen aufeinander gestapelten Kanten besteht. In diesem Spiel kann jeder der Spieler eine beliebige Anzahl der Kanten wegnehmen und das Ziel ist, die letzte Kante selber zu entfernen. Das entspricht genau Nim auf einem Haufen, wenn man die maximale Zahl der entfernbaren Kanten ignoriert! Das heißt, dass (diese Version von) Nim ein Beispiel für Stellungen in *neutralem Hackenbusch* ist.

Aufgabe 12. Welchen Wert haben die folgenden Stellungen?



Das zeigt

$$\star + \star = 0.$$

Das besondere an dieser Gleichung ist, dass $\star \neq 0$ gilt, aber dennoch $\star + \star = 0$. Solche "Zahlen" oder eher algebraische Objekte tauchen in der Mathematik sehr häufig auf, nur sind sie nicht so gut vorstellbar, weshalb sie in der Schule ignoriert werden.

Die folgende Aufgabe zeigt ein paar Rechenregeln für $\star n$. Übrigens nennt man diese Werte auch *Nimbers*, weil sie gewissermaßen Zahlen sind und sehr viel mit Nim zu tun haben.

Aufgabe 13. Beweise die folgenden Rechenregeln:

a) $\star n + \star n = 0$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$

b) $\star 1 + \star 2 = \star 3$ *Spiele die Stellung aus.*

c) $\star 1 + \star 3 = \star 2$ *Rechne mit a) und b).*

d) $\star 1 + \star 4 + \star 5 = 0$ *Spiele die Stellung und führe sie auf b) zurück.*

e) $\star 2 + \star 4 + \star 6 = 0$ *Spiele die Stellung und führe sie auf b) oder d) zurück.*

f) $\star 3 + \star 5 = \star 6$ *Rechne mit a), b), d) und e)*

g) $x + \star = \{x \mid x\}$ für alle (echten) Zahlen x

Zu guter Letzt noch ein kleiner Bonus: Nim ist ein neutrales Spiel. Es stellt sich heraus, dass Nim das universelle neutrale, endliche und normale Spiel mit vollständiger Information und ohne Zufall ist.

Satz (Sprague–Grundy). *Jedes neutrale, endliche und normale Spiel mit vollständiger Information und ohne Zufall ist äquivalent zu Nim, wenn man zu Nim die folgende Regel hinzufügt:*

- *Anstatt in einem Zug Kanten zu entfernen, darf man einen Nim-Stapel um eine beliebige Anzahl von Kanten vergrößern, wobei die Kanten nur aus dem eigenen* Vorrat *stammen dürfen. Der Vorrat besteht nur aus Kanten, die man selber in vorherigen Zügen entfernt hat.*

Dadurch kann man alle solchen Spiele (leider sind die meisten nicht sehr interessant) durch ihre Nimber-Werte beschreiben. Ein analoges Resultat für neutrales Hackenbusch existiert auch, wobei die Klasse der Spiele leider *nicht* alle endlichen, normalen Spiele mit vollständiger Information und ohne Zufall ist.