

Gymnasium Engelsdorf

Dokumentation zur Besonderen Lernleistung

Thema: Die Hohmann-Ellipse und die
Lagrange-Punkte für die Raumfahrt

Sven Prüfer*

Leipzig

Gymnasium Engelsdorf

11. Januar 2005

*mit freundlicher Unterstützung von U. Winkler (schulinterner Betreuer) und Prof. Dr. U. Behn (schulexterner Betreuer)

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 4 |
| 2 | Kursfindung in der Raumfahrt | 5 |
| 2.1 | Probleme | 5 |
| 2.2 | Bekannte Lösungen | 7 |
| 3 | Hohmann-Ellipse | 9 |
| 3.1 | Allgemeine Informationen | 9 |
| 3.2 | Geschichte | 9 |
| 3.3 | Herleitung der Ellipse | 10 |
| 3.4 | Kinematische Berechnungen | 16 |
| 3.4.1 | Allgemeine Berechnungen | 16 |
| 3.4.2 | Hinflug | 17 |
| 3.4.3 | Rückflug | 17 |
| 3.4.4 | Flugdauer, Wartezeit, Missionsdauer | 18 |
| 3.5 | Einschränkungen | 21 |
| 3.6 | Anwendung | 22 |
| 3.7 | Hohmann2-v0.0.3 – die Simulation der Bewegung auf der Hohmann-Ellipse | 23 |
| 4 | Lagrange-Punkte | 25 |
| 4.1 | Allgemeine Informationen | 25 |
| 4.2 | Geschichte | 26 |
| 4.3 | Zielsetzung | 28 |
| 4.4 | Allgemeine Festlegungen | 28 |
| 4.4.1 | Form und Abkürzungen | 28 |
| 4.4.2 | Vereinbarungen | 29 |
| 4.5 | Koordinatenberechnung | 31 |
| 4.5.1 | Vorgehen | 31 |
| 4.5.2 | Lagrange-Punkte L_1, L_2 und L_3 | 32 |
| 4.5.3 | Lagrange-Punkte L_4 und L_5 | 35 |
| 4.6 | Lineare Stabilitätsanalyse | 39 |
| 4.6.1 | Allgemeine lineare Stabilitätsanalyse | 39 |
| 4.6.2 | Bilden der Ableitungen | 41 |
| 4.6.3 | Eigenwertberechnung und Stabilität | 48 |
| 4.7 | Anwendung | 51 |
| 4.8 | Lagrange1-v0.0.2 – eine Illustration der Lagrange-Punkte | 55 |
| 4.9 | Lagrange2-v0.0.4 – ein Programm zur Simulation der Bewegungen nahe der Lagrange-Punkte | 56 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Persönliche Erfahrungen | 58 |
| 5.1 | Gelerntes | 58 |
| 5.2 | Persönlicher Eindruck | 60 |
| 6 | Zusammenfassung | 61 |
| A | Taylorreihenentwicklung | 62 |
| B | Partielle Ableitung | 62 |
| C | Gradient einer skalaren Funktion | 62 |
| D | Divergenz einer vektoriellen Funktion | 63 |
| E | Quelltexte | 63 |
| E.1 | Hohmann2 | 63 |
| E.2 | Lagrange1 | 68 |
| E.3 | Lagrange2 | 71 |

1 Einleitung

Schon immer war es ein Traum der Menschheit zu den Sternen zu reisen. Die alten Griechen philosophierten über den Aufbau der Welt und was denn die Sterne am Himmel sind, die Menschen im Mittelalter glaubten, dass ihr Schicksal von den Sternen beeinflusst wird und die Seefahrer benutzen sie zur Navigation. All dies und noch viel mehr interpretieren die Menschen seit Jahrtausenden in die Sterne. Es passt genau zu der menschlichen Neugier, alles Unbekannte erklären zu wollen, weshalb viele Menschen den Himmel beobachten, versuchen ins All zu fliegen oder sich Gedanken über die Zusammenhänge zu machen.

Heutzutage liegt das Hauptaugenmerk auf der Beobachtung und Erforschung des Weltraums. Die ersten Menschen beginnen gerade ernsthaft darüber nach zu denken, ob eine Kolonisation des Weltraums möglich ist. In einer solchen durch ständige Entwicklungen gekennzeichneten Zeit möchte auch ich mich mit dieser Problematik auseinandersetzen. Dazu betrachte ich viele Faktoren und versuche die Komplexität dieser Aufgabe, die vor der Menschheit liegt, zu erklären.

Ich möchte dazu die Hohmann-Ellipse und die Lagrange-Punkte genauer beschreiben, ihre Existenz beweisen und Programme zum besseren Verständnis erstellen. In der folgenden Arbeit wird dies alles in verständlicher Sprache und mit mathematischen Mitteln erklärt.

Bevor ich mit den Ausführungen beginne, möchte ich mich noch bei meinen beiden Betreuern bedanken, die mir eine große Hilfe waren und mich gut unterstützten: Herrn Prof. Dr. Behn und Herrn Winkler.

2 Kursfindung in der Raumfahrt

2.1 Probleme

Bevor ich zu zwei interessanten Möglichkeiten komme, die man in der Raumfahrt benutzt und die ich näher beleuchten möchte, will ich die Raumfahrt ganz allgemein beschreiben und Ihnen ein Bild davon vermitteln, wie man bei der Kursfindung vorgeht. Dazu zeige ich verschiedene Antriebsarten, mehrere Möglichkeiten, wie man die Kursproblematik angeht und Orbitsypen.

Das größte Problem, was es zu lösen gibt, ist natürlich die Überbrückung großer Distanzen, wie sie im Weltall überall vorliegen. Da das Gravitationszentrum unseres Sonnensystems in der Sonne liegt, bewegen sich die Planeten in Ellipsen um die Sonne. Die Länge der großen Halbachse des Erd-Orbits ist per Definition $1AE$. Diese Länge entspricht $149,6 \cdot 10^6 km$, was eine enorme Entfernung darstellt, die mit nichts auf der Erde vergleichbar ist. Also muss man sich unkonventionelle Ideen einfallen lassen, um aktiv Raumfahrt zu betreiben. Dabei gilt es außerdem den Zeitfaktor zu betrachten, denn z.B. Menschen bei der bemannten Raumfahrt können nicht Ewigkeiten im All verbleiben. Aber auch die unbemannte Raumfahrt hat dieses Problem, denn man möchte möglichst schnell Ergebnisse erzielen. Ein sehr extremer Fall sind die Raumsonden Voyager I und II, welche ihre Mission nach 4 Jahren abgeschlossen hatten und jetzt immer noch im Betrieb sind. Diese beiden Sonden benutzten viele Prinzipien der Raumfahrt auf ihrem jetzigen Wege Richtung Rand des Sonnensystems. Übrigens hält Voyager I den Rekord des am weitesten geflogenen, von Menschen erbauten Objekts!

Allerdings ist dieser Fall eine große Ausnahme, meistens will man das Missionsziel so schnell wie möglich erreichen und die Sonde dann abschalten, wie z.B. bei Pioneer 4, die im Orbit um die Sonne ihren Abschaltbefehl erhielt. Um so schnell wie möglich von A nach B zu kommen, gilt es im Prinzip drei Dinge zu optimieren: Dauer, Weglänge und Verbrauch. Will man z.B. von Leipzig nach Berlin mit dem Auto fahren, macht es einen großen Unterschied, ob man über München oder direkt dahin fährt. Außerdem hat man große Geschwindigkeits- und Verbrauchsunterschiede, wenn man einmal mit einem Trabant und das andere Mal mit einem Ferrari fährt. So ähnlich verhält es sich auch im Weltraum, wenn auch die Betrachtungen wesentlich komplizierter sind, denn es gibt hohe Unterschiede der Antriebe bei der Höchstgeschwindigkeit und bei der Beschleunigung. Außerdem gilt es, den Treibstoffverbrauch zu berücksichtigen, denn Treibstoff verfügt über eine große Masse, deren Trägheit sich negativ auf die Beschleunigung und den Energieverbrauch auswirken würde. Drei Antriebsarten möchte ich jetzt kurz erklären und ihre Vor- und Nachteile aufzeigen, damit die Bedeutung

der Wegfindung klar wird.

Der erste Antrieb ist die Feststoffrakete. Sie benötigt nur eine Treibstoffmasse und lässt sich gut lagern, da sie, wie der Name schon sagt, Feststoffe als Treibstoff benutzt. Allerdings lässt sich ein solcher Antrieb nach einmaligem Zünden nicht wieder abschalten. Aus diesem Grund benutzt man Feststoffraketen als die erste Stufe bei einem Raketenstart, um das gewünschte Objekt ersteinmal aus der Atmosphäre zu schießen. Ein Beispiel wäre die Thio SB-Stufe, die die NASA für ihre Space Shuttles benutzt. Jedoch sind diese Antriebe nicht für weitere Reisen zu gebrauchen.

Um doch weiter zu fliegen, benötigt man stärkere Antriebe, die man nach Bedarf an und ausschalten kann. Die im Moment üblichste Variante stellen Raketen mit flüssigem Treibstoff, wie z.B. flüssigem Sauerstoff, dar. Sie verfügen über höhere Höchstgeschwindigkeiten als die Feststoffantriebe und sind demnach für entferntere Reisen zu gebrauchen, allerdings stoßen auch sie schon heutzutage an ihre Grenzen.

Im Moment in der Entwicklung und Testphase befindet sich der Ionenantrieb, welcher z.B. von der Sonde Deep-Space 1 verwendet wird. Dieser Antrieb ionisiert Gase, welche über ein elektrisches Feld beschleunigt und nach hinten ausgestoßen werden. Dadurch erreicht er wesentlich höhere Geschwindigkeiten bei niedrigerem Treibstoffverbrauch, wobei seine Beschleunigung nicht so hoch ist wie bei den anderen Raketen. Erst nach Wochen erreicht er ähnliche Geschwindigkeiten, weshalb er für lange Flüge sehr gut geeignet ist. Es ist abzusehen, dass der Ionenantrieb in der Zukunft an Bedeutung gewinnen wird.

Versucht man nun eine Mission zu planen, hat man entweder hohe Geschwindigkeiten bei niedriger Beschleunigung oder niedrige Geschwindigkeiten bei hoher Beschleunigung. Dementsprechend muss man vorrausschauend fliegen und seinen Kurs gut bestimmen, denn kurzfristige Änderungen sind mit allen Antrieben nur schwer zu realisieren.

Wollen wir jetzt einen Kurs für eine Mission bestimmen, müssen wir ein Geflecht aus technischen Varianten, Missionszielen und Kosten beachten, was sehr kompliziert ist. Man stellt sich also die Frage, wie man am schnellsten und billigstem von der Erde zum Missionsziel kommt. Demnach sucht man nach natürlichen Wegen Energie zu sparen und an Geschwindigkeit zu gewinnen. Beispiel dafür sind z.B. das Ausnutzen der Strahlung von der Sonne mit Sonnensegeln, was manche Forscher anstreben, oder das Ausnutzen der Gravitationskräfte auf bestimmte Art und Weise. Wenn man eine Möglichkeit gefunden hat, ist es aber häufig der Fall, dass eine spezielle Konfiguration der Planeten im Sonnensystem benötigt wird, wodurch man nur zu speziellen Zeiten starten kann. Daher kommt der Begriff "Startfenster", der den Zeitraum beschreibt, der einen Flug auf einem bestimmten Kurs ermöglicht. Man

sieht also, dass sehr viele Faktoren beachtet werden müssen und dass Missionsplaner eine große Menge an Optionen benötigen, um sich eine geeignete Route auszuwählen. Im folgenden möchte ich noch einige Klassifikationen von Bahnen zeigen, was die Menge der Betrachtungsweisen noch einmal betont. Eine recht einfache Unterscheidung ist in Typ-I und Typ-II möglich. Das erste sind Kurse, die die Raumsonde weniger als 180° um die Sonne zu ihrem Ziel schicken und das letztere diejenigen, die sie mehr als 180° fliegen lassen. Bezeichnet man die Differenz der Umläufe des Zielobjektes und der Umläufe der Sonde als W^1 , so kann man zusätzlich in $W = 0, 1, \dots$ Bahnen unterscheiden. Dies bedeutet im Prinzip, dass, um so höher W ist, um so höher die Missionsdauer und oftmals auch der Treibstoffverbrauch wird. Demnach versucht man möglichst $W = 1$ Bahnen zu fliegen, wobei das Optimum bei $W = 0$ liegen würde. Diese Bahnen sind direkte Kurse zum Zielobjekt, welche aber einen sehr hohen Schub und Verbrauch voraussetzen, wozu man nicht immer in der Lage ist. Abgesehen von den Unterscheidungen der Bahnen zu den Himmelskörpern kann man natürlich noch Bahnen in Orbits von Planeten oder Monden unterscheiden, was ich kurz anschnitten möchte. Grundlegend ist der geosynchrone Orbit, bei welchem der Satellit um die Erde mit deren Periodendauer rotiert, wodurch er von der Erde gesehen sich nur von Norden nach Süden bewegt. Ein bereits praktischerer Orbit ist der geostationäre, welcher ein geosynchroner Orbit parallel zum Äquator ist. Dadurch sieht man ihn von der Erde als einen konstanten Punkt, weshalb er sich speziell für Kommunikationssatelliten anbietet. Einen Orbit mit einer Periodendauer ähnlich der des Planeten und einigen speziellen Korrekturen nennt man sonnensynchronen Orbit, welcher z.B. gerade von Mars-Global-Surveyor eingenommen wird, um Schatten für gute Bilder zu erhalten. Der letzte Orbittyp soll einer sein, bei dem die Sonde relativ zu zwei größeren Massen in Ruhe verbleibt. Dies ist heute für die Praxis noch nicht so relevant, allerdings möchte ich dies erwähnen, weil ich mich später damit sehr intensiv auseinandersetzen werde - die Lagrange-Punkte.

2.2 Bekannte Lösungen

Da die Menschheit schon seit einigen Jahren Raumfahrt betreibt, ist klar, dass man bereits Möglichkeiten gefunden hat, diese Probleme zu lösen. Um möglichst schnell zu einem anderen Planeten zu kommen, entwickelt man die Hohmann-Ellipse, welche auf vielfältige Art und Weise unterschieden werden kann. Dieser "Low-Energy-Orbit" um die Sonne benötigt nur wenige Kurs-

¹Diese Bezeichnung wurde aus [1] übernommen

korrekturen, sogenannte TCM². Da ich mich in Kapitel 4 sehr intensiv damit am Beispiel Erde-Mars beschäftige, beschränke ich mich hier darauf.

Diese Hohmann-Transfer-Orbits nutzen nur die Gravitationskraft der Sonne aus, wobei im Sonnensystem noch viele andere Körper sind, deren Masse man zum Beschleunigen benutzen könnte. Den Vorgang genau dies zu tun, nennt man Gravitationschleuder oder Swing-By. Dabei kommt die Sonde dem Himmelskörper sehr nah, fliegt an ihm vorbei und tritt mit anderer Richtung und höherer Geschwindigkeit aus seinem Orbit aus. Die Sonden Voyager I und II benutzen diese Technik sehr intensiv auf ihrem Weg aus dem Sonnensystem. Um Energie zu sparen beim Positionieren von Objekten wie Raumstationen, die relativ zu anderen Himmelskörpern fest bleiben sollen, kann man die Lagrange-Punkte benutzen. Einige Menschen denken, dass sie die Zukunft für die nächsten Stationen sind, wodurch ihnen einige Bedeutung zukommt. Da ich aber auch diese später noch genauer beschreibe, belasse ich es zunächst dabei.

Dies waren nur drei Beispiele für Methoden, die man entwickelt hat, um den Weltraum zu erobern und ich bin sicher, dass man noch mehr entwickeln wird! Nun möchte ich allerdings zwei davon näher vorstellen.

²“trajectory correction maneuvers”, Kurskorrekturmanöver

3 Hohmann-Ellipse

3.1 Allgemeine Informationen

Auf der Erde kann man zwar mit einem gewöhnlichen Verbrennungsmotor sehr schnell umherfahren, doch im Weltall ist er zwecklos. Dort verwendet man Raketenantriebe, welche einen höheren Schub erreichen. In moderneren Sonden verwendet man sogar schon einen Ionen-Antrieb. Dort werden im elektrischen Feld Teilchen beschleunigt und nach hinten ausgestoßen, wodurch die Sonde beschleunigt wird. Zwar verfügen diese Teilchen über keine sehr große Masse, doch mit ihrer enormen Geschwindigkeit machen sie dies wieder gut. So erreicht die Sonde wesentlich höhere Geschwindigkeiten, kann aber nicht so schnell beschleunigen, wie z.B. mit einem Raketenantrieb.

All diese Verfahren (unter den Antrieben gibt es natürlich wieder viele verschiedene Typen) verbrauchen aber sehr viel Treibstoff. Deshalb ist die Raumfahrtindustrie ständig bemüht, den Verbrauch zu senken. Dadurch sieht man sich genötigt, den möglichst effektivsten Weg zu nehmen. Dabei sollte man aber beachten, dass der kürzeste Weg nicht immer der effektivste ist, da wir den Kurs ja nach dem Treibstoffverbrauch optimieren wollen (die Dauer des Kurses spielt natürlich auch eine Rolle). Da die Sonde zwar in der Lage ist, hohe Geschwindigkeiten zu erreichen, auf diese aber nicht sehr schnell beschleunigen kann, ist es nicht möglich, spontan den Kurs zu wechseln und direkter auf das Ziel zu fliegen. Das bedeutet, dass der generelle Kurs bereits vor dem Missionsbeginn feststehen muss!

Außerdem kommt hinzu, dass wir uns im Moment so langsam im Weltall bewegen, dass sich die Himmelskörper in der Zwischenzeit nennenswert bewegen! So benötigen wir anderthalb Jahre zum Mars, aber dessen Umlaufzeit beträgt gerade mal 1,88 Jahre.

Es ist also jedem klar, dass man sich über prinzipielle Kurse Gedanken machen muss. Derartige Ideen entstanden zum Großteil erst im letzten Jahrhundert, da man erst dann diese dringend benötigte.

3.2 Geschichte

Die Hohmann-Ellipse wurde nach ihrem Entdecker, dem deutschen Diplom-Bauingenieur Walter Hohmann, benannt. Dieser beschrieb 1917 in dem Werk "Über die Erreichbarkeit des Mondes und der Planeten", das erst 1925 veröffentlicht wurde, Probleme der Raumfahrt und einige Lösungsvarianten. Er untersuchte systematisch den Startvorgang, den freien Flug, Umlaufbahnen und die Rückkehr sowie Landung auf Planeten und Monden. Z.B. stellte Hohmann fest, dass Landungen auf Planeten am besten durch ein leichtes

Beiboot durchzuführen sind. Bekanntlich wird dieser Gedanke auch heute noch genutzt. Zur Begründung für sein damals noch recht weltfremdes Denken leitet Hohmann sein zweites Werk so ein:

“Jeder, der eine weite Reise vor sich hat, tut gut daran, vorher einen genauen Reiseplan auszuarbeiten, der ihm Klarheit über die einzuschlagende Reiseroute und die vorraussichtliche Reisedauer verschafft. . .” [2]

3.3 Herleitung der Ellipse

Der einfachste Fall, von einem sich bewegendem Planeten auf einen anderen sich bewegenden Planeten zu kommen, soll das erste Ziel unserer Untersuchung sein. Bekannt ist, dass sich die Planeten im Sonnensystem auf elliptischen Bahnen um die Sonne bewegen, wobei sich die Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse befindet. Dies kommt dadurch zustande, dass die Masse der Sonne wesentlich höher ist, als die der Planeten. So ist die Masse der Sonne ca. das $6 \cdot 10^6$ fache der Erdenmasse. Dadurch liegt der Schwerpunkt in der Sonne. Die Ellipsen des Umlaufes der Planeten liegen in einer Ebene, der sog. Ekliptik. Das ist insofern wichtig, als wir uns deshalb auf Betrachtungen in der Ebene beschränken können. Was wir also suchen, ist eine sinnvolle Kursbahn die von einem Punkt der einen Ellipse zu einem Punkt der anderen Ellipse führt. Da unsere Sonde sich im Gravitationsfeld der Sonne bewegt, wäre es sinnvoll diese zu benutzen, um Schwung zu bekommen. Deshalb liegt als einfachste Variante eine Ellipse mit einem Brennpunkt in der Sonne vor, die die anderen beiden Ellipsen tangiert. Durch diesen Gedankengang kommt man auf die sogenannte H o h m a n n -Ellipse, welche man in Abb. 1 sieht.

Man kann sich jetzt noch vorstellen, dass diese Hohmann-Ellipse am einfachsten wird, wenn man sie durch den Aphel und den Perihel der jeweiligen Umlaufbahn-Ellipsen legt. Für uns bedeutet dies nun, dass wir diese Ellipse finden müssen, damit spätere Berechnungen möglich werden.

Die NASA gibt die beiden Abb. 2 und 3 dazu an. Eine Ellipse ist durch die folgende Gleichung gegeben

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (1)$$

Diese Gleichung in Polarkoordinaten (r, φ) gilt allgemein für alle Kegelschnitte, beschreibt jedoch mit $0 < e < 1$ eine Ellipse.

Zusätzlich gibt es noch die Darstellung in Normalform

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

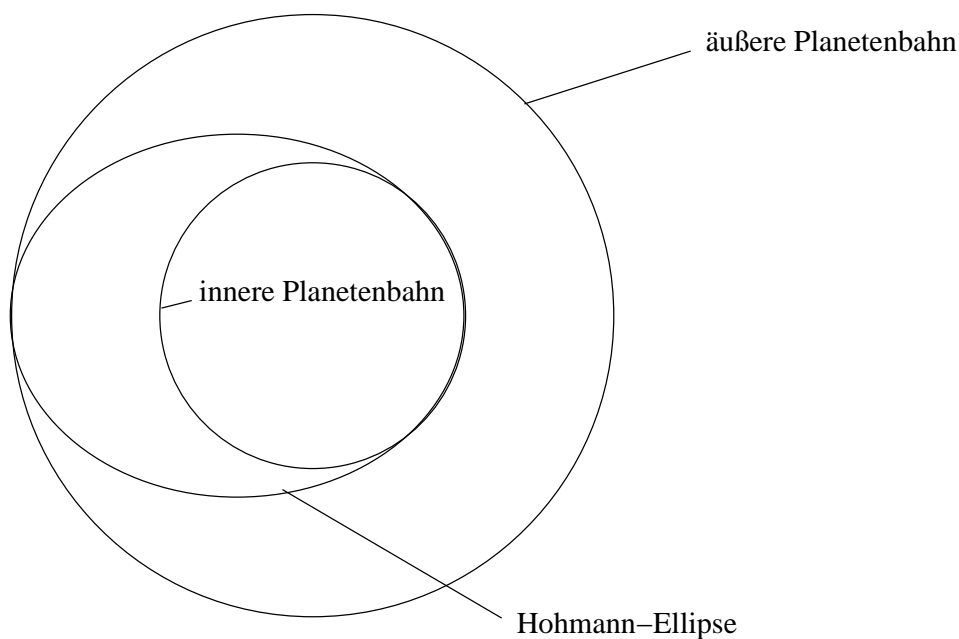


Abbildung 1: Hohmann-Ellipse

und in Parameterform

$$x = a \cos t, \quad (3)$$

$$y = b \cos t. \quad (4)$$

Dabei ist r der Abstand zum Brennpunkt, p der Halbparameter (bei Kegelschnitten gibt er den Abstand zur Leitgeraden an), e die Exzentrizität (gewissermaßen die Streckung/Stauchung der Ellipse), φ den Winkel zur großen Halbachse in mathematisch positiver Richtung, a die Länge der großen Halbachse, b die Länge der kurzen Halbachse und t ein unabhängiger Parameter. Dies alles wird noch einmal in Abb. 4 verdeutlicht.

Natürlich hat t dort keine geometrische Bedeutung!

Wenn wir nun versuchen, diese Ellipse zu “finden” bedeutet dies, dass wir die Exzentrizität e und den Halbparameter p bestimmen wollen. Damit haben wir dann die Bahn der Ellipse, also die Bahn, die das Raumschiff nehmen muss um von dem einen Planeten auf den anderen zu kommen. Aus diesen beiden Größen sind wir dann außerdem in der Lage, die anderen charakteristischen Werte der Ellipse, wie die bereits erwähnten Halbachsen, zu bestimmen.

Die folgenden Betrachtungen finden in Hinblick auf die spezielle Anwendung des Fluges Erde-Mars statt, weshalb wir davon ausgehen können, dass die Bahnen der Planeten nahezu Kreisbahnen sind. Die äußere Planetenbahn (vom Mars) besitzt ungefähr den 1,5-fachen Radius der inneren Bahn (der

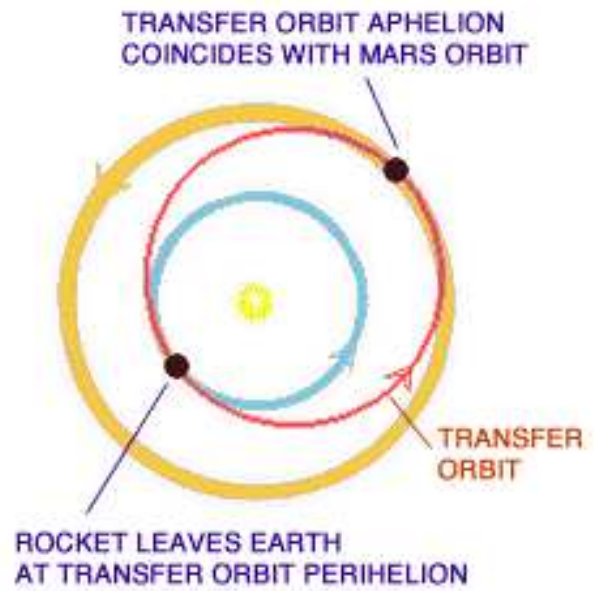


Abbildung 2: Hohmann-Ellipse zu weiter außen liegendem Planeten (aus [3])

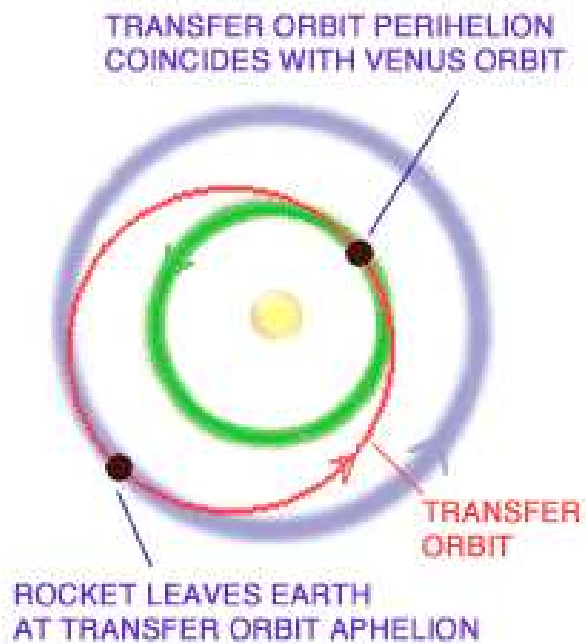


Abbildung 3: Hohmann-Ellipse zu weiter innen liegendem Planeten (aus [3])

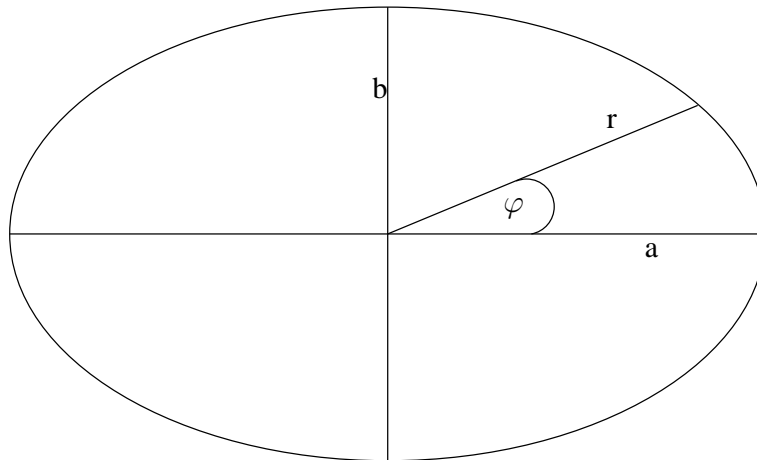


Abbildung 4: Parameter einer Ellipse

Erde). Wir vereinbaren nun, dass alle physikalischen Größen mit dem Index 1 zu der Erde gehören sollen und alle Werte mit dem Index 2 zum Mars. Daher gilt (inkl. des 3. Keplerschen Gesetzes)

$$r_2 = 1,5r_1, \quad (5)$$

$$T_1 = 365d, \quad (6)$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}. \quad (7)$$

Normalerweise gilt das Keplersche Gesetz für das Verhältnis der 3. Potenzen der großen Halbachsen, da wir hier aber von Kreisbahnen ausgehen, können wir stattdessen auch die Radien nehmen. Für T_2 gilt daher

$$T_2 = \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} T_1 = \sqrt{\frac{27}{8} \frac{r_1^3}{r_1^3}} T_1 = \sqrt{\frac{27}{8}} T_1 = 1,837 \cdot 365d \approx 671d. \quad (8)$$

Nun treffen wir eine Vereinbarung, die man in ähnlicher Weise in der Physik oftmals macht: Wir messen r in Einheiten von Erdradien, setzen dementsprechend $r_1 = 1$ und $r_2 = 1,5$ mit der Dimension des Erdradius. Nun folgen einige geometrische Betrachtungen in Abb. 5.

Der Mittelpunkt der Ellipse muss in der Mitte zwischen den Berührungspunkten A und B liegen, da diese die beiden Begrenzungspunkte der großen Halbachse bilden sollen. Deshalb ist der Abstand zwischen den Brennpunkten und dem Mittelpunkt jeweils

$$d = \frac{r_1 + r_2}{2} - r_1 = 0,25. \quad (9)$$

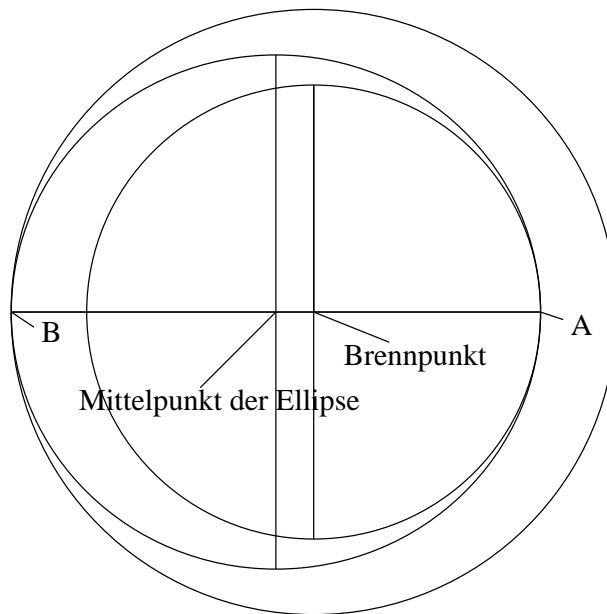


Abbildung 5: Punkte in der Ellipse

Die Länge der großen Halbachse beträgt demnach $a = \frac{5}{4}$.

Weiterhin gilt in einer Ellipse, dass die Summe der Teilstrecken von den Brennpunkten zu einem beliebigen Punkt der Ellipse konstant ist. Nehmen wir nun den Punkt an der Erdbahn. Dieser hat zur Sonne den Abstand r_1 . Zu dem anderen Brennpunkt der Ellipse hat er den Abstand $2 \times d + r_1$. Für die konstante Größe s erhalten wir damit $s = 2 \times r_1 + 2 \times d$. Danach benutzen wir den "höchsten" Punkt, der senkrecht auf dem Mittelpunkt steht und dadurch den gleichen Abstand zu den beiden Brennpunkten hat. Die Summe der Abstände beträgt s , wodurch wir für den Abstand zu genau einem der Brennpunkte $\frac{s}{2}$ und dadurch $r_1 + d$, also a erhalten. Dies wird in der Abb. 6 noch einmal verdeutlicht:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt demnach

$$d^2 + b^2 = a^2, \quad (10)$$

$$b = \sqrt{a^2 - d^2}, \quad (11)$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad (12)$$

Ich möchte noch einmal daran erinnern, dass dies immer noch mit einer Längeneinheit behaftet ist und deshalb als Vielfaches des Erdradius zu verstehen ist!

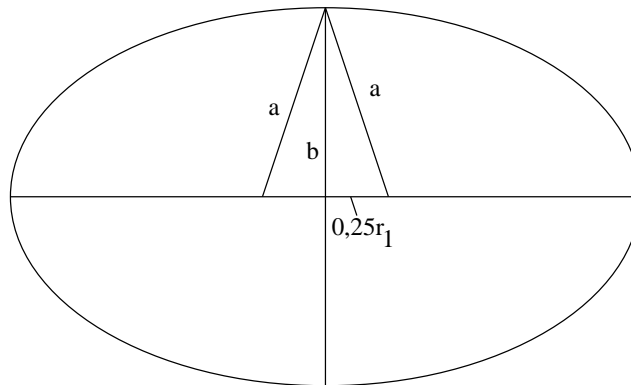


Abbildung 6: Längen in der Ellipse

Damit haben wir nun die Halbachsen a, b mit

$$a = \frac{5}{4}r_1, \quad (13)$$

$$b = \frac{\sqrt{6}}{2}r_1. \quad (14)$$

Nun müssen wir diese Werte nur noch in die gesuchten Parameter e und p umrechnen.

Dazu benutze ich folgende Zusammenhänge

$$c = e \cdot a, \quad (15)$$

$$b^2 = a \cdot p. \quad (16)$$

Also haben wir

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{4}r_1}{\frac{5}{4}r_1} = \frac{1}{5}, \quad (17)$$

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{24}}{4}r_1\right)^2}{\frac{5}{4}r_1} = \frac{96}{80}r_1 = \frac{6}{5}r_1. \quad (18)$$

Das bedeutet, dass eine Sonde, die von der Erde zum Mars fliegen soll, auf einer Hohmann-Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt, der Exzentrizität $e = \frac{1}{5}$ und dem Halbparameter $p = \frac{6}{5}r_1$ fliegen müsste.

Diese Parameter der Ellipse benötigt man, um weitere Berechnungen vorzunehmen und um schließlich ein Programm zu kreieren, das diesen Sachverhalt simuliert.

3.4 Kinematische Berechnungen

3.4.1 Allgemeine Berechnungen

Nun kommen wir zum nächsten Teil der Aufgabe, in dem wir uns überlegen, wie lange ein Raumschiff auf dieser Bahn benötigt und wie lange es warten muss, bis es wieder auf einer Hohmann-Ellipse zur Erde zurückkehren kann. Als erstes machen wir uns deutlich, warum das Schiff überhaupt warten muss. Bei den bisherigen Betrachtungen gingen wir von Ellipsen aus, allerdings sind dies nur die Bahnen der Planeten, zu einem speziellen Zeitpunkt befindet sich der Planet nur an genau einem Punkt der Bahn. Wenn nun ein Raumschiff losfliegt, die berechnete Bahn nimmt und dann die Bahn des Mars tangiert sollte der Planet auch da sein, denn sonst "verfehlt" es ihn und die Mission ist zum Scheitern verurteilt. Daraus können wir schließen, dass es nicht immer möglich ist, auf einer solchen Ellipse zu fliegen. Um geeignete Bedingungen zu finden, benötigen wir als erstes die Umlaufzeit auf der Hohmann-Ellipse

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T^2}{a^3}, \quad (19)$$

$$T^2 = \frac{a^3}{r_1^3} T_1^2 = \frac{\left(\frac{5}{4} r_1\right)^3}{r_1^3} T_1^2 = 1,25^3 \cdot 365^2, \quad (20)$$

$$T = 1,25^{\frac{3}{2}} \cdot 365 = 510d. \quad (21)$$

Also dauert der einzelne Weg von der Erde zum Mars auf der Hohmann-Ellipse 255d. Um nun herauszufinden, wann man losfliegen kann und wann nicht, schauen wir uns die Bewegungen in Abhängigkeit vom zurückgelegten Winkel an. Durch die Annahme, dass die Planeten sich auf Kreisbahnen bewegen, können wir von einer konstanten Geschwindigkeit ausgehen, die sich mit $\omega_{1,2} = \frac{2\pi}{T_{1,2}}$ berechnen lässt. Außerdem benötigen wir noch den elementaren Zusammenhang $\omega = \frac{\varphi}{t}$.

Wenn man jetzt die jeweiligen Winkel als Funktion der Zeit auffasst, kann man diese in einem Diagramm veranschaulichen. Da die Himmelskörper sich im Kreis drehen, nehmen wir alle Winkel modulo 2π . Dadurch ergibt sich folgendes Bild für die Erde:

Da der Mars aufgrund seiner größeren Entfernung zur Sonne langsamer ist, benötigt er gewissen "Vorsprung", um nach 255d den Winkel von π zu erreichen. Für das Diagramm bedeutet dies, dass die Gerade des Mars nach oben verschoben und flacher ist, wie in Abb. 8 zu sehen ist.

Wir benötigen nun den konkreten Winkel φ_0 , den der Mars vorrausfliegt und den Winkel φ_1 , der für den Rückflug zwischen Erde und Mars sein muss, damit die Sonde wieder bei der Erde ankommt.

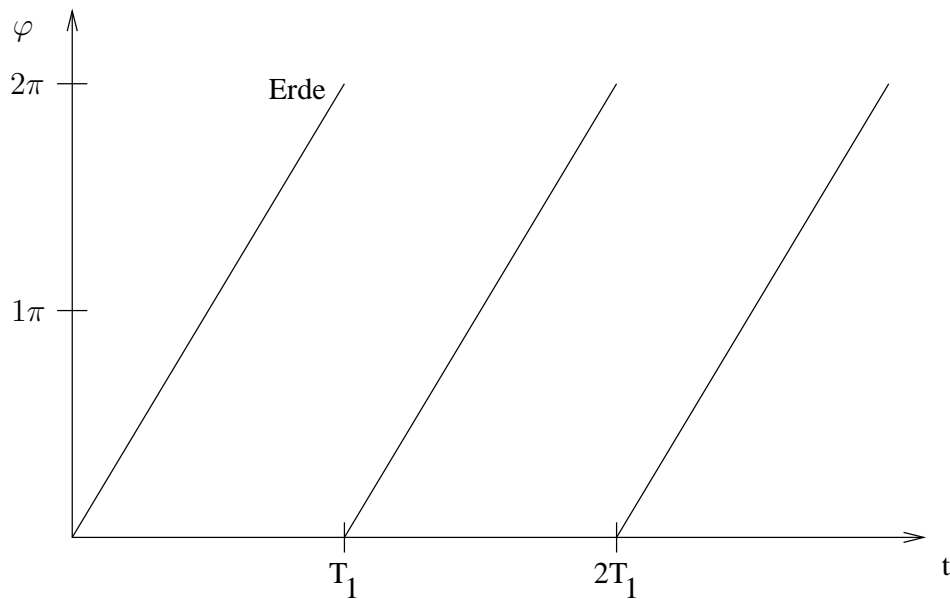


Abbildung 7: Winkel der Erde in Abhängigkeit von der Zeit

3.4.2 Hinflug

Im Moment geht es also um die Situation, welche in Abb. 9 zu sehen ist. Der Winkel φ_0 ist nun gleich π minus den Winkel, den der Mars in 255d zurücklegt, also

$$\varphi_0 = \omega_2 \left(\frac{671}{2} d - 255d \right). \quad (22)$$

Das erste Produkt hier ergibt natürlich gerade π , weil ω_2 die Winkelgeschwindigkeit des Mars ist. Weitergehend erhalten wir dann

$$\varphi_0 = \pi - \frac{255}{671} 2\pi = \left(1 - \frac{510}{671} \right) \pi \approx 0,24\pi. \quad (23)$$

3.4.3 Rückflug

Da die Erde schneller ist als der Mars, braucht der Mars, wo sich gerade die Sonde befindet, wieder einen kleinen Vorsprung. Dieser Winkel-Vorsprung ist φ_1 , den man sehr gut in Abb. 10 erkennt.

Dazu berechnen wir den Winkel, den die Erde in der Zwischenzeit des Rückfluges zurücklegt

$$\varphi = \frac{2\pi}{365d} 255d \approx 1,4\pi. \quad (24)$$

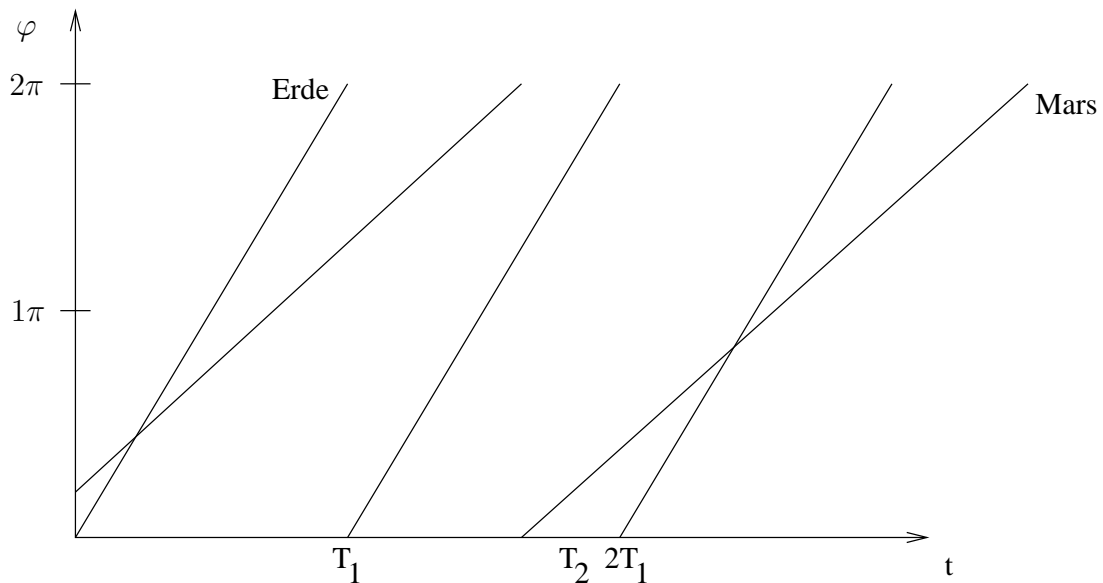


Abbildung 8: Winkel von Erde und Mars in Abhängigkeit von der Zeit

Da aber der Mars sich “gegenüber” dem Rückkehrpunkt zur Erde befindet, müssen wir noch π abziehen

$$\varphi_1 = 1,4\pi - \pi = 0,4\pi. \quad (25)$$

3.4.4 Flugdauer, Wartezeit, Missionsdauer

In Abb. 11 sieht man das komplette Koordinatensystem und dazugehörige Bezeichnungen, die für uns relevant sind.

Um den Wartezeitraum zu bestimmen, suchen wir den Zeitpunkt t_0 , zu dem der Rückflug möglich ist, sodass gilt

$$t_{\text{Wartezeitraum}} = t_0 - 255d. \quad (26)$$

Die 255d müssen abgezogen werden, weil bei $t = 0$ die Sonde startet und erst zum Mars hinfliegen muss.

Nun berechnen wir t_0 , indem wir den ersten Zeitpunkt ausrechnen, an dem der Winkel φ_1 zwischen Erde und Mars liegt. Nach dem Diagramm 11 ist klar, dass der Zeitpunkt zwischen $t = 365d$ und dem Punkt, wo Sonne, Erde und Mars auf einer Geraden liegen, ist. Deshalb zählen wir jetzt Winkel und Zeit von dem Anfangspunkt $t = 365d$ an. Die Erde hat da natürlich einen Winkel von $\varphi_{\text{Erde}} = 0$. Hingegen ist der Mars bei

$$\varphi_{\text{Mars}|_{t_0}} = \frac{2\pi}{671d} \cdot 365d + 0,24\pi = 1,328\pi. \quad (27)$$

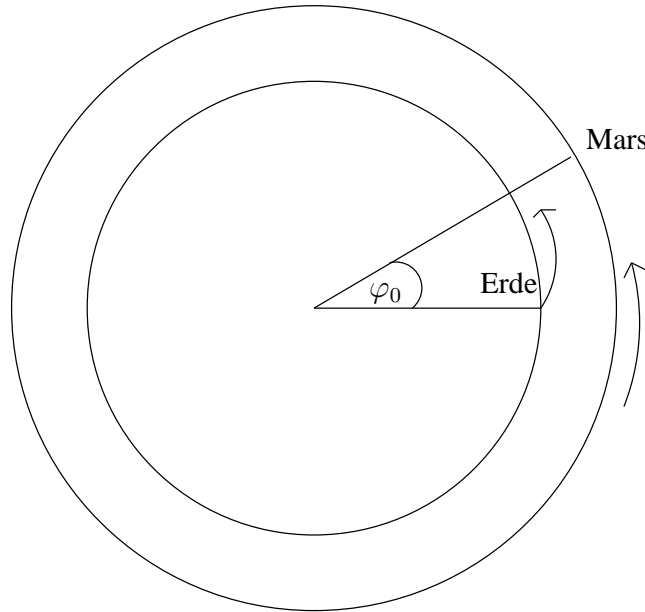


Abbildung 9: Planetenkonstellation zu Beginn des Hinflugs

Wir lösen nun also die folgende Gleichung nach t auf

$$\varphi_{\text{Mars}}(t) - \varphi_{\text{Erde}}(t) = 0,4\pi. \quad (28)$$

Für die Winkel in Abhängigkeit der Zeit gilt

$$\varphi_{\text{Mars}}(t) = \frac{2\pi}{671d} \cdot t + \varphi_{\text{Mars}|t_0} = \frac{2\pi}{671d} \cdot t + 1,328\pi, \quad (29)$$

$$\varphi_{\text{Erde}}(t) = \frac{2\pi}{365d} \cdot t. \quad (30)$$

Eingesetzt in (28) erhält man

$$\frac{2\pi}{671d} \cdot t + 1,328\pi - \frac{2\pi}{365d} \cdot t = 0,4\pi, \quad (31)$$

$$\left(\frac{2\pi}{671d} - \frac{2\pi}{365d}\right)t = -0,928\pi, \quad (32)$$

$$t = \frac{0,928\pi}{\left(\frac{2\pi}{671d} - \frac{2\pi}{365d}\right)} = 371d. \quad (33)$$

Da wir aber ab $t = 365d$ gezählt haben, müssen wir dies korrigieren

$$t_0 = 371d + 365d = 736d. \quad (34)$$

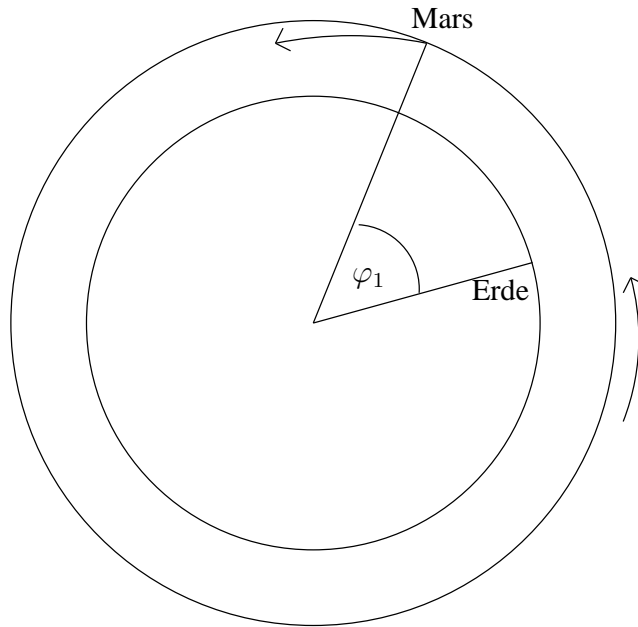


Abbildung 10: Planetenkonstellation zu Beginn des Rückfluges

In (26) ist nun

$$t_{\text{Wartezeitraum}} = t_0 - 255d = 736d - 255d = 481d. \quad (35)$$

Demnach muss die Sonde ca. 481 Tage auf dem Mars bleiben, bevor sie zur Erde auf einer weiteren Hohmann-Ellipse zurückkehren kann. Für die gesamte Mission erhält man demnach

$$t_{\text{Missionsdauer}} = 255d + 481d + 255d = 991d. \quad (36)$$

991 Tage nach dem Start der Sonde kommt sie also wieder zu Hause an. Möchte man nun noch schauen, aller wieviel Tage ein Beginn einer solchen Mission möglich ist, muss man folgende Gleichung lösen, die die Drehwinkel ab $t = 730d = 2a$ beschreibt:

$$\varphi_{\text{Mars}}(t) - \varphi_{\text{Erde}}(t) = 0,24\pi, \quad (37)$$

mit

$$\varphi_{\text{Mars}} = \frac{2\pi}{671d} \cdot t + \frac{2\pi}{671} \cdot (730d - 590d) = \frac{2\pi}{671d} \cdot t + 0,417\pi. \quad (38)$$

Dies wird in (37) eingesetzt

$$\frac{2\pi}{671d} \cdot t + 0,417\pi - \frac{2\pi}{365d} \cdot t = 0,24\pi, \quad (39)$$

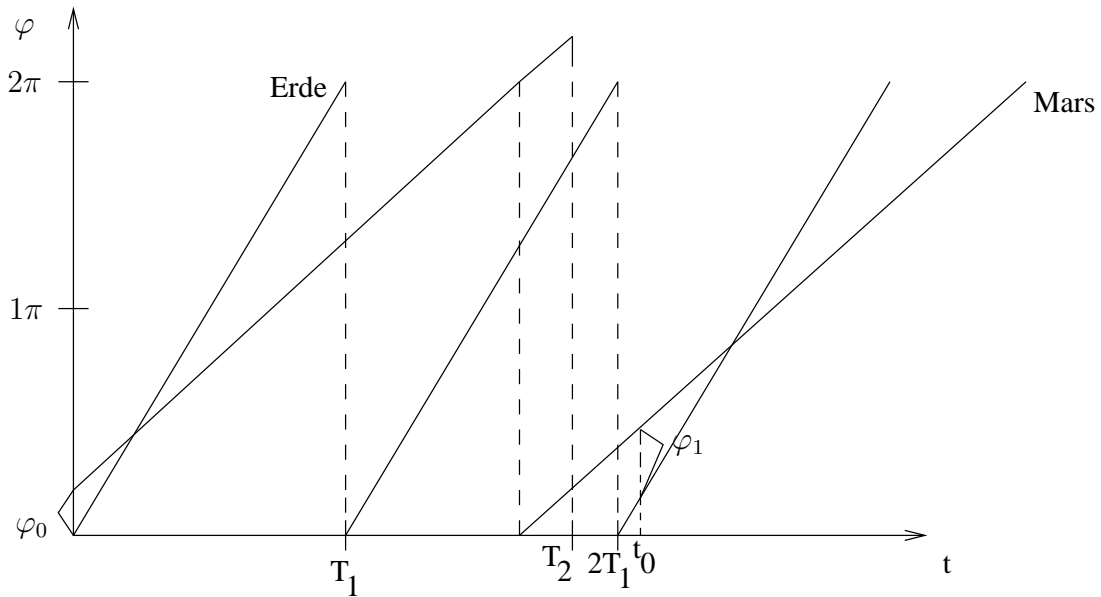


Abbildung 11: Winkel und Zeiten im Diagramm

$$\left(\frac{2\pi}{671d} - \frac{2\pi}{365d}\right)t = -0,177\pi, \quad (40)$$

$$t = \frac{-0,177\pi}{\frac{2\pi}{671d} - \frac{2\pi}{365d}} = 71d. \quad (41)$$

Dazu addiert sich nun noch die Zeitverschiebung von $730d$, wodurch wir einen Zeitraum von $730d + 71d = 801d$ erhalten. Somit ist aller 801 Tage eine Reise zum Mars auf einer Hohmann-Ellipse möglich.

3.5 Einschränkungen

Wie ich bereits an voriger Stelle erwähnte, fanden diese Betrachtungen unter einigen Einschränkungen bzw. Vereinfachungen statt, weshalb sie nicht ganz der Realität entsprechen.

Der erste Punkt, der von der Wirklichkeit abweicht, ist die Annahme, dass die Bahnen von Erde und Mars in der Modellrechnung Kreisbahnen sind. Mit guter Näherung stimmt das zwar ungefähr, doch es sind eigentlich Ellipsen mit $e \neq 0$. Dies verändert zwar weniger die Hohmann-Ellipse selber, jedoch hat dies Auswirkungen auf die kinematischen Berechnungen aus Kapitel 3.4! Für die Ellipse verursacht dies die Bedingung, dass die Berührungspunkte der Hohmann-Ellipse die Perihel- bzw. Aphel-Punkte der Umlaufbahnen sein müssen. Im erwähnten Kapitel 3.4 setzen wir die Geschwindigkeit der Planeten konstant und haben damit eine explizite Gleichung für den Ort des

Planeten zu einem Zeitpunkt. In der realen Welt hingegen ist die Geschwindigkeit der Himmelskörper durch die elliptische Umlaufbahn nicht konstant, wodurch sich genauere Rechnungen erschweren.

Weiterhin wurde der Einfluß der Planeten vernachlässigt, welcher beim Start- und Landevorgang recht wichtig ist. Die Berechnungen zur Hohmann-Ellipse zeigen damit nur den prinzipiellen Verlauf der Reise ohne etwaige Start- und Landemanöver. Aber auch nach dem Start der Sonde hat die Erde mit ihrer Gravitationskraft einige Auswirkungen auf die Sonde, welche aber im Vergleich zur Sonne sehr gering sind. Dennoch haben wir hier diesen Aspekt komplett vernachlässigt.

Nun stellt sich noch die Frage, inwiefern dieses Prinzip auch auf andere Planetenpaare übertragen werden kann, denn die hier durchgeführten Berechnungen sind nur für eine Reise von der Erde zum Mars und wieder zurück! Um von der Erde zu anderen Planeten zu reisen, kann man genauso vorgehen, muss jedoch die jeweiligen Werte benutzen. Auch für eine Reise zu weiter innen liegenden Planeten funktioniert dies, allerdings ist dann Hin- und Rückreise vertauscht.

Man sieht dadurch, dass wir hier eine für uns ausreichende Berechnung der Hohmann-Ellipse erzielt haben, wobei für eine konkrete Sondenmission noch genauere Betrachtungen notwendig sind.

3.6 Anwendung

Die primäre Anwendung dieser Ellipse in der Raumfahrt ist klar. Man verwendet sie, um Sonden oder später auch bemannte Raumschiffe möglichst effektiv zu anderen Planeten (z.B. dem Mars) zu schicken. Im folgenden Abschnitt möchte ich meine Berechnungen mit den konkreten Ergebnissen der NASA bzw. der ESA vergleichen und schauen, wo man die Hohmann-Ellipse noch findet.

Im „Basics of Space Flight“ schreibt die NASA zum Hohmann-Orbit:

“This existing solar orbit must be adjusted to cause it to take the spacecraft to Mars: The desired orbit’s perihelion (closest approach to the sun) will be at the distance of Earth’s orbit, and the aphelion (farthest distance from the sun) will be at the distance of Mars’ orbit. This is called a Hohmann Transfer orbit. The portion of the solar orbit that takes the spacecraft from Earth to Mars is called its trajectory.” [3]

Weiterführend erwähnt die amerikanische Raumfahrtbehörde nur den Flug von Erde zu Mars, bzw. von der Erde zur Venus als Beispiel für eine Hohmann-

Ellipse zu einem weiter innen liegenden Planeten. Eine Beispielmission, die die Hohmann-Ellipse für den Flug zum Mars nutzt, ist Mars Pathfinder, die am 4.7.1997 auf dem Mars ankam. Sie benötigte 3 TCM's, also Kurskorrekturen und befindet sich nun nach ihrem Abschluss in einem Orbit um Mars. Für andere weiter entfernte Ziele nutzt man diese Bahn allerdings weniger, denn man kann zwar ohne weiteres die Ellipse berechnen und die Reise planen und dies funktioniert auch, aber es gibt für weiter entfernt liegende Planeten effektivere Varianten wie z.B. die Swing-By-Technik, bei der man an dazwischen liegenden Himmelskörpern Schwung holt.

Dennoch ist die Hohmann-Ellipse sehr wichtig, denn man kann sie auch bei Flügen im Orbit der Erde benutzen. Wenn man z.B. von einer Raumstation zu einem Satelliten fliegen möchte kann man dies mit Hilfe der Ellipse machen um dabei sicher und ohne viel Treibstoffaufwand dahin zu kommen.

Die NASA gibt für den Hohmann-Transfer-Orbit von der Erde zum Mars an, dass er alle 25 Monate möglich ist, was meiner Berechnung von 801 Tagen relativ nahe kommt. Die Pathfinder-Mission brauchte ca. 237 Tage um von der Erde zum Mars zu kommen, auch diese, praktisch erprobte, Rechnung kommt der meinigen recht nahe.

Viele Leute, die sich mit der Optimierung der Transferzeiten auf solchen Ellipsen beschäftigt haben, sind zu dem Schluss gekommen, dass diese Bahnen recht effektiv sind und man nicht durch zusätzlichen Schub Zeit gut machen kann. Berechnungen ergaben, dass leichte Erhöhungen der Geschwindigkeit maximal 3-11 Tage Vorteil bringen würden. Dagegen kann eine Verlegung der Ellipse derart, dass sie die Bahn des Ziels nicht tangiert, sondern schneidet und dann auf dem "Rückweg" ankommt, sehr hilfreich sein.

3.7 Hohmann2-v0.0.3 – die Simulation der Bewegung auf der Hohmann-Ellipse

Hohmann2 ist ein Programm zur Visualisierung einer Mission auf der Hohmann-Ellipse. Die Standardeinstellungen zeigen den berechneten Verlauf einer Mission von der Erde zum Mars. Da der Computer nur mit gerundeten Werten rechnet, weichen die Ergebnisse in Hohmann2 von den hier berechneten leicht ab. Da Kongruenzrechnungen benutzt wurden, ist das Programm nicht in der Lage, für verschiedene Verhältnisse richtige Zahlen zu ermitteln. Jedoch ist es fähig, am Beispiel der Reise Erde-Mars, den Sachverhalt zu demonstrieren und ein Bild vom Verlauf einer derartigen Mission zu vermitteln. Mit Hilfe der Eingabefelder Radius 1 und Radius 2 ist es möglich, die Reise von verschiedenen Planeten zu anderen Planeten zu simulieren, wobei durch

das erwähnte Problem nur die Hinreise einwandfrei funktioniert. Der Geschwindigkeitsregler erlaubt es, die Anzeige zu beschleunigen. Im zentralen Image-Fenster kann man die Bewegung des Ursprungsplaneten (blau), des Zielplaneten (rot), der Sonne in der Mitte und der Sonde (weiß) verfolgen. Die schwarzen Kreise sind die Bahnen der Planeten und die rote Ellipse ist die Hohmann-Ellipse für den Hinflug. Da beim Rückflug eine andere Ellipse benötigt wird, wird die Anzeige der Hohmann-Ellipse dann auf die gedrehte Ellipse umgeschaltet. Zusätzlich zu der Visualisierung kann man im Fenster "Ausgabe" die aktuellen x- und y-Koordinaten, den Drehwinkel φ , den Halbparameter p , die Exzentrizität e , die Flugzeit auf der Hohmann-Ellipse und die bereits verstrichene Zeit t betrachten. Außerdem gibt es einen großen roten Label, der die aktuelle Aufgabe der Sonde anzeigt. Zum genauen Verständnis der Arbeitsweise des Programms habe ich den kommentierten Quelltext im Anhang abgedruckt.

4 Lagrange-Punkte

4.1 Allgemeine Informationen

Im Basics of Space Flight Dokument der NASA heißt es bezüglich der Lagrange-Punkte:

“Joseph Louis Lagrange (1736-1813) showed that three bodies can occupy positions at the apexes of an equilateral triangle that rotates in its plane. Consider a system with two large bodies being the Earth orbiting the sun (or the Moon orbiting the Earth). The third body, such as a spacecraft or an asteroid, might occupy any of five Lagrange points.” [3]

Dieses Zitat stammt aus dem Kapitel “The Environment of Space - Planetary Orbits” [3], woraus man eine gewisse Vorstellung entwickeln könnte, worum es sich handelt. In dem Dokument ist die Rede von 5 Lagrange-Punkten, an denen sich ein Raumschiff oder ein Asteroid aufhalten könnte, doch was befindet sich dort? Was macht diese Positionen im Weltraum so besonders? Sucht man nach entsprechenden einfachen Erklärungen, findet man Sachen wie “Dort heben sich Gravitations- und Zentrifugalkraft auf” oder “Das sind Punkte im Gravitationsfeld, wo Körper bleiben”. In den beiden Sätzen wird deutlich, dass zumindest die Punkte nicht nur bei Erde und Sonne vorhanden sind, sondern auch bei anderen Himmelskörpern. Aus diesem Grund werden die späteren Betrachtungen auch ganz allgemein geführt.

Aber was brauchen wir nun genau, um diese 5 Punkte zu erhalten? Als erstes benötigen wir natürlich, wie die NASA sagt, zwei große Massen. Vorzugsweise können dies Paare wie Erde-Sonne, Mond-Erde oder Jupiter-Sonne sein. Die wichtigste Bedingung an diese Körper soll sein, dass die eine Masse viel größer als die andere ist. Daraus resultiert eine Bewegung der Massen um den gemeinsamen Schwerpunkt, wobei der Schwerpunkt sehr nah an der größeren Masse liegt. Nun fügen wir dem eine dritte, sehr kleine, Masse hinzu. Dieser kleine Körper bewegt sich nun im Gravitationsfeld entsprechend der Kräfte, die von den beiden größeren Massen ausgehen. Die Lagrange-Punkte sind nun fünf Punkte in diesem Gravitationsfeld, wo die kleine Masse besondere Verhaltensweisen aufweist, das heißt z.B., an dieser Position verbleibt oder zumindest sich lange Zeit in ihrer Nähe bewegt.

Physikalisch kann man dieses Verhalten in einem Kraftfeld mit Hilfe des Potentials untersuchen. Dann kann man die Lagrange-Punkte auch als die Extrema des Potentials im Gravitationsfeld erklären (Abb.12).

Die Punkte haben die übliche Bezeichnung L_1 , L_2 , L_3 , L_4 und L_5 . Die beiden letzten Punkte sind besonders interessant. Auffällig sind sie dadurch gewor-

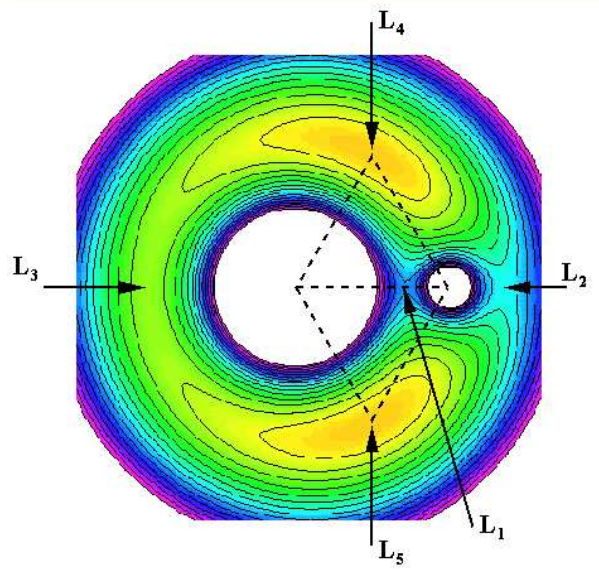


Abbildung 12: Potential im eingeschränktem Drei-Körper-Problem (aus [4])

den, dass man bei L_4 und L_5 des Jupiter-Sonne-Systems die sogenannten “Trojaner”, eine Gruppe von Asteroiden, gefunden hat. Deshalb hat man ihnen auch die Bezeichnung “Trojan points” gegeben hat

4.2 Geschichte

Wie der Text von der NASA sagt, wurden diese fünf Lagrange-Punkte erstmals von Joseph-Louis Lagrange (Abb.13) im Jahre 1772 bewiesen. Mit seiner damaligen Veröffentlichung “Essai sur le problème des trois corps”, in der er Eulers Theorien zum generellen Drei-Körperproblem begründete, gewann er zusammen mit Euler den Preis der “Académie des Sciences” in Paris zum Orbit des Mondes. Er beschrieb darin Lösungen, in denen der dritte Körper sich an der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks von den anderen beiden Körpern befand, was der Position der Punkte L_4 und L_5 entspricht. Allerdings erwähnte er zeitgleich, dass diese Berechnungen wohl nicht zum Sonnensystem passen würden und keine praktische Anwendung finden würde. Jedoch heute wissen wir, dass das Gegenteil der Fall ist, denn z.B. der erste Trojaner “Achilles”, der 1908 entdeckt wurde, ist ein klares Beispiel für die Existenz und die Bedeutung Lagranges Entdeckung. Weiterhin fand man viele Phänomene, die man auf die Lagrange-Punkte zurückführt, natürlich erst im 20. Jahrhundert, weil man erst dann in der Lage war, sehr kleine Objekte wahrzunehmen und mit der Raumfahrt auch über eine praktische



Abbildung 13: Joseph-Louis Lagrange (aus [5])

Anwendung der Punkte nachzudenken.

4.3 Zielsetzung

Nun stellt sich die Frage, was ich in dem Kapitel 5 darstellen möchte. Das Ziel am Ende soll sein, dass ein Programm entsteht, das den Sachverhalt der 5 Lagrange-Punkte simuliert und Bewegungen der kleinen Masse nahe der Librationszentren anzeigt. Um dies durchzuführen ist es allerdings notwendig, dass ich die Zusammenhänge verstehe, weshalb ich nun versuchen möchte, die Punkte zu lokalisieren und ihre Stabilität herzuleiten. Für einen Lösungsansatz benutze ich das Dokument [4], das in einer groben Zusammenfassung dies erklärt, jedoch einige Fehler und Lücken aufweist. Aus diesem Grund beginne ich bei Null und beschreibe sehr ausführlich, wie dies zu berechnen ist. Vorangehende Definitionen und Syntax werden in 4.4 vereinbart. Danach werden in 4.5 die Koordinaten der Lagrange-Punkte berechnet und in 4.6 die Stabilität dargelegt. Abschließend beschreibe ich die beiden Programme, die aus diesem Grundwissen entstanden sind, für was sie einsetzbar sind, wo ihre Grenzen liegen und wie man sie bedient.

4.4 Allgemeine Festlegungen

4.4.1 Form und Abkürzungen

Grundlegend verwende ich Syntax, die in Universitäten üblich ist und auch international in der Physik verwendet wird. Das bedeutet insbesondere, dass Vektoren fett und ohne Pfeil geschrieben werden. Der Vektor \vec{r} ist also

$$\vec{r} = \mathbf{r}. \quad (42)$$

Außerdem benutze ich den üblichen Punkt über Vektoren um die Differenzierung nach t , also der Zeit, zu kennzeichnen

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (43)$$

Wenn \mathbf{r} also der Ortsvektor eines Massepunktes sein soll, ist $\dot{\mathbf{r}}$ die Geschwindigkeit des Massepunktes und $\ddot{\mathbf{r}}$ die Beschleunigung.

Die Einheitsvektoren werde ich mit \mathbf{e} bezeichnen und gegebenenfalls durch einen Index erweitern, damit die Richtung klar wird.

Da alle Vektoren fett geschrieben werden, ist klar, dass Skalare in normaler Schreibweise erscheinen. Teilweise werden Skalarprodukte benutzt, welche dann, wie üblich, durch einen Punkt gekennzeichnet sind

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\alpha). \quad (44)$$

Wie in dieser Gleichung deutlich wird, bezeichnet ein normal geschriebener Buchstabe, der als Vektor existiert, den Betrag eben dieses Vektors. Kreuzprodukte werden auch hier mit einem \times dargestellt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin(\alpha) \mathbf{e}_{\perp(ab)}. \quad (45)$$

Wenn ich einen Term für einen speziellen Punkt oder Wert ausdrücken möchte, schreibe ich an den Ausdruck einen senkrechten Strich und den gewünschten Wert. So z.B bei

$$\mathbf{F}|_{r_0} = 0. \quad (46)$$

Teilweise benutze ich dafür auch Indizes, das kommt auf den jeweiligen Fall an.

An einigen Stellen benötigen wir dringend Matrizen, welche ganz normal mit Klammern und den jeweiligen Elementen geschrieben sind. Die Bezeichnung einer Matrix geschieht mit einem Großbuchstaben, dessen senkrechter Strich verstärkt ist

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Die Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix mit lauter Einsen in ihrer Hauptdiagonale

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Die Determinante kennzeichne ich mit senkrechten Strichen

$$\det(\mathbb{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (49)$$

Außerdem ist zu erwähnen, dass die meisten Funktionen, die ich benutze, von mehreren Variablen abhängen, weshalb die in der Schule üblichen gewöhnlichen Ableitungen nicht ausreichen. Leitet man eine Funktion, die mehrere Variablen enthält ab, benutzt man die sogenannte partielle Ableitung, die in ihrer Definition der gewöhnlichen sehr ähnelt. Sie wird genauer im Anhang B erklärt.

4.4.2 Vereinbarungen

In diesem Kapitel widme ich mich der Definition der wichtigen Größen, die wir für die Berechnungen benötigen. Das beinhaltet Längen, Geschwindigkeiten, Kräfte und Massen, sowie spezielle Verhältnisse. Als erstes betrachte ich das Ganze als ein eingeschränktes 3-Körperproblem, was bedeutet, dass

$$M_1 \gg M_2 \quad (50)$$

gelten soll und m derartig klein ist, dass es von den anderen Massen beeinflusst wird, aber selbst keine Kraft auf sie ausübt. In der Skizze 14 sieht man die meisten Längen.

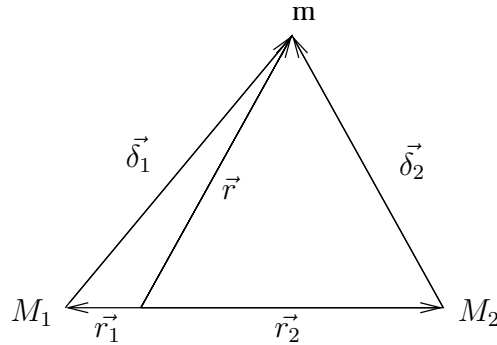


Abbildung 14: Vektoren im Inertialsystem

In Worten bedeutet dies, dass \mathbf{r} der Ortsvektor der kleinen Masse m sein soll, \mathbf{r}_1 der Ortsvektor der sehr großen Masse M_1 und \mathbf{r}_2 der Ortsvektor der großen Masse M_2 .

$\delta_{1/2}$ sind die Vektoren von den großen Massen M_1 und M_2 zur kleinen Masse, wodurch gilt

$$\delta_{1/2} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{1/2}. \quad (51)$$

Der Koordinatenursprung ist der Schwerpunkt der größeren Massen. Da die beiden Massen M_1 und M_2 umeinander rotieren, liegt das Rotationszentrum in diesem Koordinatenursprung. Außerdem sollen M_1 und M_2 auf der x-Achse liegen. Damit haben wir ein Inertialsystem, in dem nur die Gravitationskraft wirkt und ein rotierendes Bezugssystem, in welchem zusätzlich die Scheinkräfte wirken.

Außerdem benutzen wir Keplers drittes Gesetz für das eingeschränkte Zweikörperproblem³

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2). \quad (52)$$

Wie setzen weiterhin den Abstand der beiden großen Massen konstant als R , also

$$R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \quad (53)$$

Um die Ortsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 zu bestimmen, führen wir zwei Massenverhältnisse ein

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad (54)$$

³Dieser Zusammenhang ist entnommen aus [4]

$$\beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2}. \quad (55)$$

Offensichtlich ist

$$\alpha + \beta = 1. \quad (56)$$

Damit der Schwerpunkt im Koordinatenursprung liegt, muss

$$M_1 r_1^x + M_2 r_2^x = 0 \quad (57)$$

gelten, wobei r_i^x die x-Koordinate von \mathbf{r}_i sein soll. Dies erledigt

$$r_1^x = -\alpha R, \quad (58)$$

$$r_2^x = \beta R, \quad (59)$$

denn

$$-M_1 \frac{M_2}{M_1 + M_2} R + M_2 \frac{M_1}{M_1 + M_2} R = 0. \quad (60)$$

Demnach gilt für die Gravitationskraft im Inertialsystem

$$\mathbf{F}_{\text{Grav}} = -G \frac{mM_1}{\delta_1^3} \boldsymbol{\delta}_1 - G \frac{mM_2}{\delta_2^3} \boldsymbol{\delta}_2. \quad (61)$$

Für das rotierende System ist die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$, die wir konstant setzen, sehr wichtig, denn wir benötigen sie für die Zentrifugalkraft. Da wir uns auf die Ebene beschränken, steht der Richtungsvektor der Winkelgeschwindigkeit stets senkrecht auf der xy-Ebene, so dass x-Richtung, y-Richtung und Winkelgeschwindigkeitsrichtung ein Rechtssystem bilden. Die Zentrifugalkraft ist dann

$$\mathbf{F}_{\text{Zentrifugal}} = -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = m\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}. \quad (62)$$

Außerdem benötigen wir noch die Corioliskraft als die zweite Scheinkraft, welche gleich

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2m(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) \quad (63)$$

ist.

4.5 Koordinatenberechnung

4.5.1 Vorgehen

Die Lagrangepunkte finden wir, indem wir $\dot{\mathbf{r}} = 0$ setzen und dann nach Punkten suchen, für die

$$\mathbf{F}_{\text{Grav}} + \mathbf{F}_{\text{Zentrifugal}} = \mathbf{0} \quad (64)$$

gilt.

Durch Einsetzen von (61) und (62) erhält man

$$-G \frac{mM_1}{\delta_1^3} \boldsymbol{\delta}_1 - G \frac{mM_2}{\delta_2^3} \boldsymbol{\delta}_2 + m\Omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (65)$$

Nun kann man die Gleichung lösen, um die \mathbf{r} zu finden, für die dies gilt.

4.5.2 Lagrange-Punkte L_1, L_2 und L_3

Als erstes wollen wir jetzt die Punkte suchen, für die $y = 0$ gilt, also diejenigen, die auf der Geraden durch M_1 und M_2 liegen. Wir substituieren: $x = x_2 + uR$ wodurch u die Koordinate des Punktes bezüglich M_2 in Einheiten von R sein soll. Wir erhalten also

$$x = x_2 + uR = (\beta + u)R, \quad (66)$$

$$\delta_2 = uR, \quad (67)$$

$$\delta_1 = R + \delta_2 = R(1 + u). \quad (68)$$

Eingesetzt in (65) und durch m dividiert erhalten wir für die x-Koordinate

$$-G(M_1 \frac{1+u}{|1+u|^3 R^2} + M_2 \frac{u}{|u|^3 R^2}) + \Omega^2(\beta + u)R = 0. \quad (69)$$

Den Term $1 + u$ können wir mit $|1 + u|^3$ kürzen wenn wir die Fälle für das Vorzeichen beachten. Dazu führe ich eine Variable s_1 ein, für die gilt $s_1 = \text{sgn}(1 + u)$. $\text{sgn}(\cdot)$ soll das Vorzeichen von $1 + u$ bestimmen. Weiterhin soll $s_0 = \text{sgn}(u)$ das Vorzeichen von u sein. Damit erhalten wir

$$-G(M_1 \frac{s_1}{(1+u)^2 R^2} + M_2 \frac{s_0}{u^2 R^2}) + \Omega^2(1 - \alpha + u)R = 0. \quad (70)$$

Mit dem 3. Keplergesetz aus (52) können wir $\frac{G}{R^3}$ durch $\frac{\Omega^2}{M_1 + M_2}$ substituieren, wobei wir vorher noch durch R dividieren müssen.

Wir erhalten

$$-\frac{\Omega^2}{M_1 + M_2} (M_1 \frac{s_1}{(1+u)^2} + M_2 \frac{s_0}{u^2}) + \Omega^2(1 - \alpha + u) = 0. \quad (71)$$

Laut (54) und (55) gilt dadurch

$$-\Omega^2 (\frac{\beta s_1}{(1+u)^2} + \frac{\alpha s_0}{u^2}) + \Omega^2(1 - \alpha + u) = 0. \quad (72)$$

Jetzt dividieren wir durch Ω^2 und wenden (56) an

$$-\left[(1-\alpha)\frac{s_1}{(1+u)^2} + \alpha\frac{s_0}{u^2}\right] + 1 + u - \alpha = 0, \quad | \cdot u^2, \cdot (1+u)^2 \quad (73)$$

$$(1+u-\alpha)(1+u)^2u^2 - (1-\alpha)s_1u^2 - \alpha s_0(1+u)^2 = 0. \quad (74)$$

Dies ist eine Gleichung 5. Grades in u , weshalb wir u nicht direkt per Lösungsformel ausrechnen können. Stattdessen verwenden wir ein Näherungsverfahren namens Störungstheorie. Dabei benutzen wir, dass $\alpha \ll 1$ nach (50) ist. Bei der Störungstheorie nähern wir uns der tatsächlichen Lösung an, indem wir von einem Punkt aus eine Taylorreihenentwicklung machen, wobei wir hier als Potenzen der Störung $\alpha^{\frac{1}{3}}$ -Schritte wählen. Damit gilt für x

$$x = R(1 + A\alpha^{\frac{1}{3}} + B\alpha^{\frac{2}{3}} + C\alpha + D\alpha^{\frac{4}{3}} + \mathcal{O}). \quad (75)$$

\mathcal{O} soll hier das Restglied mit den höheren Potenzen von $\alpha^{\frac{1}{3}}$ sein, wobei wir \mathcal{O} vernachlässigen wollen. In (66) eingesetzt ergibt das

$$u = \frac{x}{R} - \beta = 1 - \beta + A\alpha^{\frac{1}{3}} + B\alpha^{\frac{2}{3}} + C\alpha + D\alpha^{\frac{4}{3}}, \quad (76)$$

$$u = \alpha + A\alpha^{\frac{1}{3}} + B\alpha^{\frac{2}{3}} + C\alpha + D\alpha^{\frac{4}{3}}. \quad (77)$$

Diesen Ausdruck müssen wir nun für u in (74) einsetzen und nach Potenzen von α sortieren. Danach machen wir einen Koeffizientenvergleich und erhalten Lösungen für A , B , C und D

$$(\dots)\alpha^0 + (\dots)\alpha^1 + (\dots)\alpha^{\frac{4}{3}} + \dots + (\dots)\alpha^{\frac{20}{3}} = 0. \quad (78)$$

Da in u überall ein α enthalten ist, brauchen wir den Koeffizienten vor α^0 nicht zu berechnen, er wird sowieso null sein. Das heißt, wir benötigen vor allem den Faktor vor α^1 . Dazu multiplizieren wir als erstes (74) für $(s_0, s_1) = (-1, 1)$ aus

$$(u^2 + u^3 - \alpha u^2)(1 + 2u + u^2) - u^2 + \alpha u^2 + \alpha(1 + 2u + u^2) = 0, \quad (79)$$

$$u^2 + 2u^3 + u^4 + u^3 + 2u^4 + u^5 - \alpha u^2 - 2\alpha u^3 - \alpha u^4 - u^2 + \alpha u^2 + \alpha + 2\alpha u + \alpha u^2 = 0, \quad (80)$$

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 + u^2\alpha + 2\alpha u + \alpha = 0. \quad (81)$$

Jetzt versuchen wir (77) einzusetzen. Wir sortieren nun alle Koeffizienten, um die Summanden zu finden, welche einen Eintrag vor α^1 in (78) hinterlassen. Da u mindestens $\alpha^{\frac{1}{3}}$ enthält, sind alle Potenzen von u , deren Exponent größer als 3 ist, vernachlässigbar. Außerdem fallen alle Summanden weg, die αu

enthalten, da dort mindestens die Potenz $\frac{4}{3}$ erreicht wird. Dementsprechend haben wir nur noch

$$\alpha + 3u^3 = 0. \quad (82)$$

Die einzige Möglichkeit bei u^3 auf α zu kommen, ist 3 mal $\alpha^{\frac{1}{3}}$ zu multiplizieren. Damit erhalten wir nach (82)

$$1 + 3A^3 = 0, \quad | -1, : 3, ()^{\frac{1}{3}} \quad (83)$$

$$A = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (84)$$

Da α sehr klein ist, reicht bereits dieser Koeffizient, um eine sehr gute Näherung zu erreichen. Damit haben wir den ersten Lagrangepunkt bei

$$x = R\left(1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \quad (85)$$

Die Koordinaten sind demnach

$$L_1 = \left[R\left(1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right), 0 \right]. \quad (86)$$

Nun gilt es, den Fall $(s_0, s_1) = (1, 1)$ zu betrachten. Die Gleichung (81) sieht dann entsprechend so aus

$$-\alpha - 2\alpha u - \alpha u^2 + (3 - 2\alpha)u^3 + (2 - \alpha)u^4 + 2u^5 = 0. \quad (87)$$

Nun setzen wir auch hier (77) ein und suchen nach den Koeffizienten, die α ergeben. Hier sind dies alle Summanden ohne αu und mit u maximal in der 3. Potenz, wodurch wir die folgende Gleichung erhalten:

$$3u^3 - \alpha = 0. \quad (88)$$

Die Koeffizienten sind damit

$$3A^3 - 1 = 0, \quad | +1, : 3, ()^{\frac{1}{3}} \quad (89)$$

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (90)$$

Dies ergibt die Koordinaten für den zweiten Lagrangepunkt bei

$$L_2 = \left[R\left(1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right), 0 \right]. \quad (91)$$

Der letzte Fall $(s_0, s_1) = (-1, -1)$ erzeugt folgende Gleichung für (81)

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 + (2 - \alpha)u^2 + 2\alpha u + \alpha = 0. \quad (92)$$

Dies lösen wir mit dem Ansatz $u = a + b\alpha$. Wenn wir dies in die vorige Gleichung einsetzen erhalten wir in der Ordnung α^0

$$2 + 3a + 3a^2 + a^3. \quad (93)$$

Damit dieser Term verschwindet setzen wir ihn gleich Null und erhalten

$$a = -2 \quad (94)$$

als Lösung. In der Ordnung α^1 lautet (92) dann

$$12b - 7 = 0. \quad (95)$$

Für b ergibt sich

$$b = \frac{7}{12}. \quad (96)$$

Mit

$$x = (\beta + u)R = (1 - \alpha - 2 + \frac{7}{12}\alpha)R = -(1 + \frac{5}{12}\alpha)R \quad (97)$$

erhält man die Koordinaten von L_3 als

$$L_3 = \left[- \left(1 + \frac{5}{12}\alpha \right) R, 0 \right]. \quad (98)$$

4.5.3 Lagrange-Punkte L_4 und L_5

Nun suchen wir mögliche Lagrange-Punkte, die nicht auf der Verbindungsgerade von M_1 und M_2 liegen. Dazu zerlegen wir die Kraft auf die Masse m in die Anteile parallel zum \mathbf{r} -Vektor und senkrecht dazu.

\mathbf{e}_r soll der Einheitsvektor in Richtung von \mathbf{r} sein. Der dazu senkrechte Einheitsvektor ist \mathbf{e}_\perp . Dadurch gilt

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\perp = 0. \quad (99)$$

Als erstes berechnen wir nun den zum \mathbf{r} -Vektor senkrechten Teil, indem wir eine Skalarmultiplikation mit \mathbf{e}_\perp durchführen

$$\mathbf{F}_{\text{Grav}} \cdot \mathbf{e}_\perp = 0. \quad (100)$$

Die Zentrifugalkraft können wir vernachlässigen, da sie in Richtung von \mathbf{r} wirkt.

Dadurch erhält man mit (61)

$$-Gm \left(\frac{M_1}{\delta_1^3} \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \mathbf{e}_\perp + \frac{M_2}{\delta_2^3} \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \mathbf{e}_\perp \right) = 0. \quad (101)$$

Für $\boldsymbol{\delta}_{1/2}$ gilt

$$\boldsymbol{\delta}_{1/2} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{1/2} = \begin{cases} \mathbf{r} - \alpha R \mathbf{e}_x \\ \mathbf{r} + \beta R \mathbf{e}_x \end{cases}. \quad (102)$$

Dies wird in (101) eingesetzt

$$-Gm \left[\frac{M_1}{\delta_1^3} (\mathbf{r} - \alpha R \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_\perp + \frac{M_2}{\delta_2^3} (\mathbf{r} + \beta R \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_\perp \right] = 0. \quad (103)$$

Wegen $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\perp = 0$ (aufgrund der Orthogonalität) erhalten wir

$$-Gm \left(\frac{M_1}{\delta_1^3} \alpha R \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\perp + \frac{M_2}{\delta_2^3} \beta R \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\perp \right) = 0. \quad (104)$$

Nun dividieren wir durch die in beiden Summanden vorhandenen Faktoren $-GmR(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\perp)$. Das Skalarprodukt ist ungleich null, da sonst der Punkt auf der x-Achse liegen würde, was wir vorher ausgeschlossen haben. Somit ergibt sich

$$\frac{M_1 \alpha}{\delta_1^3} - \frac{M_2 \beta}{\delta_2^3} = 0. \quad (105)$$

Hier werden (54) und (55) eingesetzt

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \left(\frac{1}{\delta_1^3} - \frac{1}{\delta_2^3} \right) = 0. \quad (106)$$

Damit die Kraft senkrecht zum \mathbf{r} -Vektor verschwindet, muss also

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta \quad (107)$$

gelten.

Nun untersuchen wir noch die Kräfte parallel zum \mathbf{r} -Vektor. Hierzu suchen wir Lösungen für

$$\mathbf{F}_{\text{Grav}} \cdot \mathbf{e}_r + m\Omega^2 r = 0. \quad (108)$$

Das ergibt

$$-Gm \left(\frac{M_1}{\delta_1^3} \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \mathbf{e}_r + \frac{M_2}{\delta_2^3} \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \mathbf{e}_r \right) + m\Omega^2 r = 0. \quad (109)$$

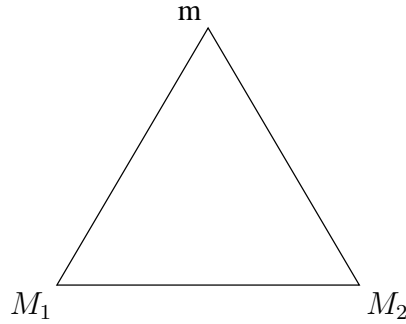


Abbildung 15: Gleichseitiges Dreieck der Körper

Wegen (102) haben wir hier

$$-Gm \left(\frac{M_1}{\delta^3} (\mathbf{r} - \alpha R \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_r + \frac{M_2}{\delta^3} (\mathbf{r} + \beta R \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_r \right) + m\Omega^2 r = 0. \quad (110)$$

Das multiplizieren wir aus und erhalten

$$-Gm \left(\frac{M_1}{\delta^3} r - \alpha R \frac{M_1}{\delta^3} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r + \frac{M_2}{\delta^3} r + \beta R \frac{M_2}{\delta^3} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r \right) + m\Omega^2 r = 0. \quad (111)$$

Da $\alpha M_1 = \beta M_2$ aus (54 und (55 folgt, können wir (111) stark vereinfachen

$$-Gm \left(\frac{M_1}{\delta^3} r + \frac{M_2}{\delta^3} r \right) + m\Omega^2 r = 0. \quad (112)$$

Jetzt dividieren wir dies durch mr und klammern δ^3 aus

$$-\frac{G}{\delta^3} (M_1 + M_2) + \Omega^2 = 0. \quad (113)$$

Damit der vordere Term gleich $-\Omega^2$ wird muss laut (52)

$$\delta = R = \delta_1 = \delta_2 \quad (114)$$

gelten.

Also bilden M_1 , M_2 und m ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge R , wie in Abb. 15 zu sehen. Um die x-Koordinate zu berechnen betrachten wir nun Abb. 16. Daraus folgt

$$x = \frac{R}{2} - \alpha R, \quad (115)$$

$$x = \beta R - \frac{R}{2}. \quad (116)$$

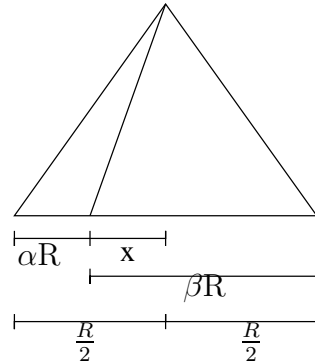


Abbildung 16: Längen auf der x-Achse

Addiert man nun die beiden Gleichungen, erhält man

$$2x = (\beta - \alpha)R = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) R. \quad (117)$$

Das ergibt für die x-Koordinate

$$x = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{R}{2}. \quad (118)$$

Die y-Koordinate entspricht der Höhe im gleichseitigen Dreieck, weshalb wir sie mit $y = h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ berechnen (s soll die Seitenlänge des Dreiecks sein).

$$y = \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}R \quad (119)$$

Da aber 2 derartige Dreiecke existieren gibt es noch einen zweiten Punkt, dessen y-Koordinate wir durch Spiegelung an der x-Achse erhalten.

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}R \quad (120)$$

Somit sind die Koordinaten der 4. und 5. Lagrange-Punkte

$$L_4 = \left[\left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}R \right] \quad (121)$$

und

$$L_5 = \left[\left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}R \right]. \quad (122)$$

In Abb. 17 sieht man, wo die Lagrange-Punkte liegen, womit man eine bessere Vorstellung bekommt.

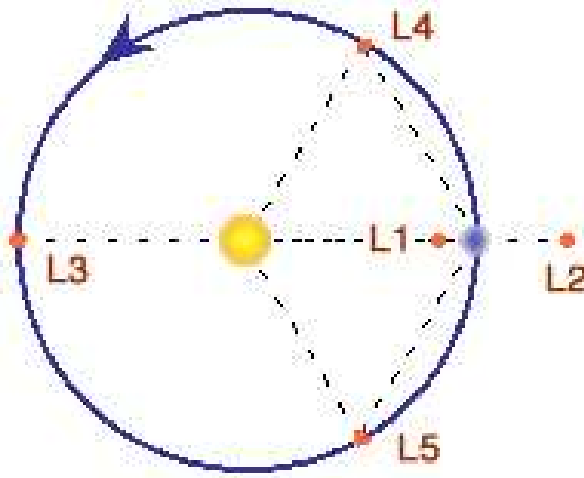


Abbildung 17: Lage der Lagrange-Punkte (aus [3])

4.6 Lineare Stabilitätsanalyse

4.6.1 Allgemeine lineare Stabilitätsanalyse

Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen. Um zu bestimmen, ob ein Punkt stabil oder instabil ist, setzen wir einen Körper in die Nähe des Lagrange-Punktes und schauen, ob er sich in Richtung des Punktes oder von ihm weg bewegt. Dazu betrachten wir die Potentialfunktion $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. An einem Gleichgewichtspunkt \mathbf{r}_0 gilt $\dot{\mathbf{r}}|_{\mathbf{r}_0} = 0$. Für die Kraft dort gilt weiterhin

$$\mathbf{F}|_{\text{GG-Punkt}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r}, 0)|_{\mathbf{r}_0} = 0. \quad (123)$$

Die hier und im weiteren verwendete Ableitung nach einem Vektor wird im Anhang näher erklärt.

Nun wollen wir uns aber etwas von dem Punkt entfernen, weshalb wir setzen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}, \quad (124)$$

und

$$\dot{\mathbf{r}} = \delta \dot{\mathbf{r}}. \quad (125)$$

Nun führen wir eine Taylorreihenentwicklung für die Kraft an diesem Punkt aus. Wie im Anhang A erklärt, können wir dabei n Glieder betrachten und die weiteren im Restglied $\mathcal{O} = R_n(x)$ zusammenfassen. Dabei vernachlässigen wir diese höheren Ableitungen, weil uns bereits diese Näherung

an den tatsächlichen Wert reicht. An dem Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r} erhalten wir demnach für die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}, \delta\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, 0) + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{r}}|_0 \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\dot{\mathbf{r}}}|_0 \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} + \mathcal{O}. \quad (126)$$

Damit haben wir die Kraft auf einen Massepunkt nahe eines Gleichgewichtspunktes durch dessen Koordinaten und Geschwindigkeit angegeben. Der erste Ausdruck ist aber nun wie wir vorhin festgestellt haben $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0, 0) = 0$. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen nahe des Gleichgewichtspunktes lauten demnach

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{r}} \\ \delta\ddot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r} \\ \delta\dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{r}}|_0 & \frac{1}{m} \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\dot{\mathbf{r}}}|_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r} \\ \delta\dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix}. \quad (127)$$

Falls die Eigenwerte der Matrix einen negativen Realteil haben, gehen $\delta\mathbf{r}$ und $\delta\dot{\mathbf{r}}$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Dementsprechend brauchen wir die 1. Ableitungen der Kraft, wobei wir beachten müssen, dass wir uns in der xy -Ebene befinden und die Matrix dadurch 4×4 Elemente enthält.

Diese 4×4 Matrix sieht nun folgendermaßen aus, wobei die Vektoren jetzt in ihre x und y Komponenten aufgeteilt werden

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{x}} \\ \delta\dot{\mathbf{y}} \\ \delta\ddot{\mathbf{x}} \\ \delta\ddot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_0 & \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y}|_0 & \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_0 & \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y}|_0 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x}|_0 & \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_0 & \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x}|_0 & \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{y} \\ \delta\dot{\mathbf{x}} \\ \delta\dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix}. \quad (128)$$

Allgemeiner Stabilitätsbegriff. Die Stabilität folgt aus den Eigenwerten der Matrix (128). Als erstes diskutiere ich die möglichen Arten von Stabilität und die dazugehörigen Fälle der Eigenwerte.

1. reelle Eigenwerte: Massepunkt bewegt sich geradlinig auf den Gleichgewichtspunkt zu (negativ) oder bewegt sich geradlinig von ihm weg (positiv)
2. imaginäre Eigenwerte: Massepunkt rotiert um den Gleichgewichtspunkt
3. komplexe Eigenwerte: Massepunkt bewegt sich auf einer Spirale auf den Gleichgewichtspunkt zu oder weg

Diese Möglichkeiten beziehen sich darauf, dass alle Eigenwerte die jeweiligen Eigenschaften besitzen. Sollten z.B. reelle und komplexe Eigenwerte vorhanden sein, ist der Punkt instabil, denn es treten verschiedene Bewegungen auf. Diese Bedingungen sind [6] entnommen.

Zusammenstellen der Grundgleichungen. Ich möchte noch einmal kurz ins Gedächtnis rufen, dass wir für die Kraft auf m im Gravitationsfeld erhalten

$$\mathbf{F}_{\text{Grav}} = -\frac{GM_1 m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \frac{GM_2 m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (129)$$

Allerdings addieren sich zu dieser Gravitationskraft die Scheinkräfte

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (130)$$

$$\mathbf{F}_{\text{Zentrifugal}} = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega} = m\Omega^2 \mathbf{r} \text{ für } \boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{r}. \quad (131)$$

Ausserdem gibt es einen wichtigen Zusammenhang durch Kepler's drittes Gesetz für das Zweikörperproblem

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2). \quad (132)$$

Die Koordinaten der Lagrange-Punkte sind wie oben berechnet:

| | x | y |
|----|--|-------------------------|
| L1 | $R \left(1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ | 0 |
| L2 | $R \left(1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ | 0 |
| L3 | $-R \left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right)$ | 0 |
| L4 | $\frac{R}{2} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} R$ |
| L5 | $\frac{R}{2} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right)$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2} R$ |

Hierbei gilt:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \quad (133)$$

$$\delta_1 = \sqrt{(x + \alpha R)^2 + y^2}, \quad \delta_2 = \sqrt{(x - \beta R)^2 + y^2}. \quad (134)$$

4.6.2 Bilden der Ableitungen

Allgemeine Ableitungen der Kräfte

Gravitationskraft. Für die Stabilitätsberechnung benötigen wir nun die erste Ableitung der Gravitationskraft nach x . Dazu leiten wir zunächst die x -Komponente von (129) nach x ab

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} = -G \left[\frac{M_1}{\delta_1^3} + \frac{M_2}{\delta_2^3} - 3 \left(\frac{M_1(x + \alpha R)^2}{\delta_1^5} + \frac{M_2(x - \beta R)^2}{\delta_2^5} \right) \right]. \quad (135)$$

Die Ableitung der y -Komponente von (129) nach y ergibt

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} = -G \left[\frac{M_1}{\delta_1^3} + \frac{M_2}{\delta_2^3} - 3y^2 \left(\frac{M_1}{\delta_1^5} + \frac{M_2}{\delta_2^5} \right) \right]. \quad (136)$$

Nun gilt es noch, die gemischten Ableitungen zu berechnen. Dazu benutze ich wieder die x -Komponente aus (129) und leite diese nach y ab

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = 3Gy \left(\frac{M_1(x + \alpha R)}{\delta_1^5} + \frac{M_2(x - \beta R)}{\delta_2^5} \right) = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x}. \quad (137)$$

Die Gleichheit von $\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x}$ für bis zur zweiten Ableitung stetigen Funktionen folgt aus [7].

Zentrifugalkraft. Die Zentrifugalkraft ist

$$\mathbf{F}_{\text{Zentrifugal}} = m\Omega^2 \mathbf{r}. \quad (138)$$

Auch dies wird komponentenweise nach x bzw. nach y abgeleitet

$$\frac{\partial F_{\text{Zentrifugal}}^x}{\partial x} = m\Omega^2 = \frac{\partial F_{\text{Zentrifugal}}^y}{\partial y}. \quad (139)$$

Die gemischten Ableitungen verschwinden

$$\frac{\partial F_{\text{Zentrifugal}}^x}{\partial y} = \frac{\partial F_{\text{Zentrifugal}}^y}{\partial x} = 0. \quad (140)$$

Corioliskraft. Bei der Corioliskraft ist es noch einfacher, denn sie ist unabhängig von \mathbf{r} , so dass gilt

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{Coriolis}}}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (141)$$

Allerdings benötigen wir für die Matrix (128) noch die Ableitungen der Kräfte nach $\dot{\mathbf{r}}$. Da aber die Corioliskraft die einzige Kraft ist, welche von $\dot{\mathbf{r}}$ abhängt, berechnen wir sie nur hier

$$\frac{\partial F_{\text{Coriolis}}^x}{\partial v_y} = -\frac{\partial F_{\text{Coriolis}}^y}{\partial v_x} = 2m\Omega. \quad (142)$$

Gesamte Kraft. Dies führt zur Gesamtgleichung der ersten Ableitung der Kraft nach x

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} = -G \left[\frac{M_1}{\delta_1^3} + \frac{M_2}{\delta_2^3} - 3 \left(\frac{M_1(x + \alpha R)^2}{\delta_1^5} + \frac{M_2(x - \beta R)^2}{\delta_2^5} \right) \right] + \Omega^2. \quad (143)$$

Nun wird das gleiche nocheinmal für y gemacht

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} = -G \left[\frac{M_1}{\delta_1^3} + \frac{M_2}{\delta_2^3} - 3y^2 \left(\frac{M_1}{\delta_1^5} + \frac{M_2}{\delta_2^5} \right) \right] + \Omega^2. \quad (144)$$

Hinzu kommen die gemischten Ableitungen, wobei hier nur der Gravitations-
teil existiert

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} = 3Gy \left(\frac{M_1(x + \alpha R)}{\delta_1^5} + \frac{M_2(x - \beta R)}{\delta_2^5} \right). \quad (145)$$

Ableitungen an L_1 . Nun müssen wir noch die Koordinaten der Lagrange-
Punkte in die Ableitungen einsetzen, was im folgenden für L_1 geschieht.

Durch $y = 0$ erhält man

$$\delta_1 = (x + \alpha R)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = x + \alpha R. \quad (146)$$

Das gleiche gilt natürlich auch für δ_2 ! Zusammengefasst erhält man dadurch
für $\frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_1}$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_1} = -G \left(-2 \frac{M_1}{\delta_1^3} - 2 \frac{M_2}{\delta_2^3} \right) + \Omega^2. \quad (147)$$

Durch Einsetzen von $x = R(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}})$ kann man $\frac{1}{R^3}$ ausklammern

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_1} = 2 \frac{G}{R^3} \left(\frac{M_1}{(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{M_2}{(-(\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2. \quad (148)$$

Mit dem Keplerschen Gesetz kommt man auf

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_1} = 2 \frac{\Omega^2}{(M_1 + M_2)} \left(\frac{M_1}{(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{M_2}{(-(\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2 \quad (149)$$

$$= 2\Omega^2 \left(\frac{1 - \alpha}{(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{\alpha}{(-(\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2. \quad (150)$$

Der Klammerausdruck geht für $\alpha \rightarrow 0$ gegen -2 . Daher erhalten wir

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_1} = -3\Omega^2. \quad (151)$$

Für $\frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_1}$ erhält man folgendes (durch $y = 0$):

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_1} = -G \left(\frac{M_1}{\delta_1^3} + \frac{M_2}{\delta_2^3} \right) + \Omega^2. \quad (152)$$

Einsetzen der x Koordinate liefert

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_1} = -G \left(\frac{M_1}{R^3(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{M_2}{R^3(-(\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2. \quad (153)$$

Wieder durch Ausklammern von $\frac{1}{R^3}$ und Anwenden des 3. Kepler-Gesetzes kommt man auf

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_1} = -\frac{\Omega^2}{(M_1 + M_2)} \left(\frac{M_1}{(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{M_2}{(-(\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2, \quad (154)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_1} = -\Omega^2 \left(\frac{1 - \alpha}{(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{\alpha}{(-(\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2. \quad (155)$$

Wir wissen, dass der Klammerausdruck für $\alpha \rightarrow 0$ gegen -2 geht, weshalb

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_1} = +3\Omega^2. \quad (156)$$

Nun fehlen für L_1 nur noch die gemischten Ableitungen $\frac{\partial F^x}{\partial y}|_{L_1}$ und $\frac{\partial F^y}{\partial x}|_{L_1}$. Für diese gilt

$$\frac{\partial F^y}{\partial x}|_{L_1} = \frac{\partial F^x}{\partial y}|_{L_1} = 3Gy \left(\frac{M_1(x + \alpha R)}{\delta_1^5} + \frac{M_2(x - \beta R)}{\delta_2^5} \right) = 0. \quad (157)$$

Ableitungen an L_2 . Bei L_2 sieht es ganz ähnlich aus, nur, dass hier einige Plus- durch Minuszeichen ersetzt werden:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_2} = 2\Omega^2 \left(\frac{1 - \alpha}{(1 + (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{\alpha}{((\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2. \quad (158)$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ erhalten wir hier 4 für die große Klammer. Wir können also schreiben

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_2} = +9\Omega^2. \quad (159)$$

Bei $\frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_2}$ benutzen wir wieder die Gleichung von L_1 mit den Koordinaten von L_2 , da zwischen den Koordinaten nur ein Vorzeichen-Unterschied ist:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_2} = -\Omega^2 \left(\frac{1 - \alpha}{(1 + (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} + \frac{\alpha}{((\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}} + \alpha)^3} \right) + \Omega^2. \quad (160)$$

Wie bei (158) ist auch hier der Klammerausdruck für $a \rightarrow 0$ gleich 4, weshalb insgesamt

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_2} = -3\Omega^2 \quad (161)$$

ist.

Da $y = 0$ gilt auch hier

$$\frac{\partial F^y}{\partial x}|_{L_2} = \frac{\partial F^x}{\partial y}|_{L_2} = 0. \quad (162)$$

Ableitungen an L_3 . Die Koordinaten von $L_3(-R(1 + \frac{5}{12}\alpha), 0)$ setze ich nun ein, um dessen Stabilität zu bestimmen (hier insbesondere $y = 0$)

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_3} = -\frac{G}{R^3} \left(-2 \frac{M_1}{(\frac{7}{12}\alpha - 1)^3} - 2 \frac{M_2}{(\frac{7}{12}\alpha - 2)^3} \right) + \Omega^2, \quad (163)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_3} = 2\Omega^2 \left(\frac{1 - \alpha}{(\frac{7}{12}\alpha - 1)^3} + \frac{\alpha}{(\frac{7}{12}\alpha - 2)^3} \right) + \Omega^2. \quad (164)$$

Die Klammer geht hier gegen -1 , weshalb

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_3} = -\Omega^2. \quad (165)$$

Für $\frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_3}$ gilt

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_3} = -G \left(\frac{M_1}{\delta_1^3} + \frac{M_2}{\delta_2^3} \right) + \Omega^2. \quad (166)$$

Durch Ausklammern von R^3 wie in den anderen beiden Punkten erhält man

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_3} = -\Omega^2 \left(\frac{1 - \alpha}{(\frac{7}{12}\alpha - 1)^3} + \frac{\alpha}{(\frac{7}{12}\alpha - 2)^3} \right) + \Omega^2. \quad (167)$$

Es gilt also

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_3} = +2\Omega^2. \quad (168)$$

Durch $y = 0$, vgl.(145), erhalten wir auch hier

$$\frac{\partial F^y}{\partial x}|_{L_3} = \frac{\partial F^x}{\partial y}|_{L_3} = 0. \quad (169)$$

Ableitungen an L_4 . Als erstes setze ich hier die Koordinaten in die einzelnen Ausdrücke der allgemeinen Ableitungen ein, da wir dort sehr viel vereinfachen können

$$((x + \alpha R)^2 + y^2) = \left(\frac{R}{2}\left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) + \frac{M_2}{M_1 + M_2}R\right)^2 + \frac{3}{4}R^2 \quad (170)$$

$$= \left(R\left(\frac{\beta - \alpha}{2} + \alpha\right)\right)^2 + \frac{3}{4}R^2 \quad (171)$$

$$= \left(R\frac{\beta + \alpha}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}R^2 \quad (172)$$

$$= R^2 = \delta_1^2 = \delta_2^2. \quad (173)$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks zwischen M_1, M_2 und L_4 .

Nun weiter mit anderen Ausdrücken:

$$x + \alpha R = R\left(\frac{\beta - \alpha}{2} + \alpha\right) = \frac{R}{2}, \quad (174)$$

$$x - \beta R = R\left(\frac{\beta - \alpha}{2} - \beta\right) = -\frac{R}{2}. \quad (175)$$

Das wird jetzt alles in die Ableitung $\frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_4}$ eingesetzt

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_4} = -G \left(\frac{M_1}{R^3} + \frac{M_2}{R^3} - \frac{3M_1 R^2}{4R^5} - \frac{3M_2 R^2}{4R^5} \right) + \Omega^2, \quad (176)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_4} = -\frac{1}{4}G \left(\frac{M_1}{R^3} + \frac{M_2}{R^3} \right) + \Omega^2. \quad (177)$$

Nun setze ich das Keplergesetz ein:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_4} = -\frac{1}{4}\Omega^2 + \Omega^2, \quad (178)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}|_{L_4} = \frac{3}{4}\Omega^2. \quad (179)$$

Jetzt kommen wir zu $\frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_4}$, wobei wir gleich die vereinfachten Terme benutzen:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}|_{L_4} = G \left[\frac{M_1}{R^3} + \frac{M_2}{R^3} - \frac{9}{4}R^2 \left(\frac{M_1}{R^5} + \frac{M_2}{R^5} \right) \right] + \Omega^2. \quad (180)$$

Vereinfacht und mit den gleichen Grenzwerten wie bei $\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_4}$ erhält man

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} |_{L_4} = \frac{5}{4} G \left(\frac{M_1}{R^3} + \frac{M_2}{R^3} \right) + \Omega^2, \quad (181)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} |_{L_4} = \frac{5}{4} \Omega^2 + \Omega^2, \quad (182)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} |_{L_4} = +\frac{9}{4} \Omega^2. \quad (183)$$

Als letztes heißt es nun noch, die gemischten Ableitungen von L_4 zu berechnen:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} = G \left(\frac{3yM_1(x + \alpha R)}{\delta_1^5} + \frac{3yM_2(x - \beta R)}{\delta_2^5} \right), \quad (184)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} = G \left(3 \frac{\sqrt{3}}{2} R M_1 \frac{R}{2} \frac{1}{R^5} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} R M_2 \frac{R}{2} \frac{1}{R^5} \right). \quad (185)$$

Das veränderte Vorzeichen erscheint durch $(x - \beta R) = -\frac{R}{2}$, deshalb erweitern wir nun mit $M_1 + M_2$:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \left(\frac{3}{4} \sqrt{3} \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right), \quad (186)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} = \frac{3}{4} \sqrt{3} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \Omega^2, \quad (187)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} = \frac{3}{4} \sqrt{3} (\beta - \alpha) \Omega^2. \quad (188)$$

Ableitungen an L_5 . Dazu nehme ich die Gleichungen von L_4 und substituiere y durch $-y$, da dies der einzige Unterschied bzgl. der Koordinaten der Punkte ist.

Für $\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_5}$ erhalte ich deshalb

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_5} = G \left(\frac{M_1}{R^3} + \frac{M_2}{R^3} - \frac{3M_1 R^2}{4R^5} - \frac{3M_2 R^2}{4R^5} \right) + \Omega^2. \quad (189)$$

Da hier kein y vorkommt, gilt

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_5} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} |_{L_4} = \frac{3}{4} \Omega^2. \quad (190)$$

Da y in $\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} \Big|_{L_5}$ nur in der zweiten Potenz vorkommt, spielt das Vorzeichen von y keine Rolle,

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} \Big|_{L_5} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} \Big|_{L_4} = +\frac{9}{4} \Omega^2. \quad (191)$$

In den gemischten Ableitungen (145) kommt y genau einmal als Faktor vor, also ändert sich entsprechend das Vorzeichen gegenüber der Ableitung an L_4 so

$$\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} \Big|_{L_5} = \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} \Big|_{L_5} = -\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} \Big|_{L_4} = -\frac{3}{4} \sqrt{3} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \Omega^2. \quad (192)$$

Zusammenfassung der Ableitungen. In der folgenden Tabelle sind die jeweiligen Ableitungen noch einmal kurz zusammengefasst, da wir diese bei der Eigenwertberechnung dringend brauchen.

| | $\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x}$ | $\frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y}$ | $\frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y}$ |
|-------|---|---|--|
| L_1 | $-3\Omega^2$ | $+3\Omega^2$ | 0 |
| L_2 | $+9\Omega^2$ | $-3\Omega^2$ | 0 |
| L_3 | $-1\Omega^2$ | $+2\Omega^2$ | 0 |
| L_4 | $+\frac{3}{4}\Omega^2$ | $+\frac{9}{4}\Omega^2$ | $+\frac{3}{4}\sqrt{3}(\beta - \alpha)\Omega^2$ |
| L_5 | $+\frac{3}{4}\Omega^2$ | $+\frac{9}{4}\Omega^2$ | $-\frac{3}{4}\sqrt{3}(\beta - \alpha)\Omega^2$ |

4.6.3 Eigenwertberechnung und Stabilität

Charakteristisches Polynom. Um die Eigenwerte von (128) zu berechnen substituieren wir die Matrix-Elemente

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & d & 0 & c \\ d & b & -c & 0 \end{pmatrix}. \quad (193)$$

Nun sind die Eigenwerte λ die Werte, für die

$$\det(\mathbb{F} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (194)$$

gilt.

Wir suchen also die Werte λ für die

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & d & -\lambda & c \\ d & b & -c & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (195)$$

ist.

Die Determinante dieser Matrix wird nach der ersten Zeile entwickelt

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & d & -\lambda & c \\ d & b & -c & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ d & -\lambda & c \\ b & -c & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ a & d & c \\ d & b & -\lambda \end{vmatrix}. \quad (196)$$

Nach der Sarrus'schen Regel ergibt sich

$$-\lambda(-\lambda^3 + 0 - dc - c^2\lambda - 0 + b\lambda) + 1(0 - cd\lambda + ab - 0 - a\lambda^2 + d^2). \quad (197)$$

Vereinfacht ist dies gleich

$$\lambda^4 + cd\lambda + c^2\lambda^2 - b\lambda^2 - cd\lambda + ab - a\lambda^2 + d^2. \quad (198)$$

Dies wird nach λ sortiert und man erhält

$$\lambda^4 + (c^2 - a - b)\lambda^2 + ab - d^2. \quad (199)$$

Dieses Polynom nennt man charakteristisches Polynom und seine Nullstellen in λ sind die gesuchten Eigenwerte, was bedeutet, dass wir nun nur noch die Ableitungen einsetzen müssen und 4 Eigenwerte für jeden Punkt erhalten. Explizit sind die Quadrate der Eigenwerte λ gleich

$$\lambda_{\pm}^2 = -\frac{c^2 - a - b}{2} \pm \sqrt{\frac{(c^2 - a - b)^2}{4} - ab + d^2}. \quad (200)$$

Für die Eigenwerte λ erhalten wir demnach

$$\lambda_{\rho\delta} = \rho \sqrt{-\frac{c^2 - a - b}{2} + \delta \sqrt{\frac{(c^2 - a - b)^2}{4} - ab + d^2}}, \quad (201)$$

wobei die Kombinationen $\rho, \delta = \pm 1$ die 4 Eigenwerte an einem Punkt ergeben.

Eigenwerte bei L_1 . Nach der Tabelle aus 5.6.2 ergibt sich

$$a = -3\Omega^2, \quad (202)$$

$$b = +3\Omega^2, \quad (203)$$

$$c = +2\Omega, \quad (204)$$

$$d = 0. \quad (205)$$

Somit wird aus (201)

$$\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_1} = \rho\sqrt{-2 + \delta\sqrt{13}} \cdot \Omega^2. \quad (206)$$

Da $\sqrt{13} > 2$ ist, gilt für $\delta = \rho = +1$

$$\frac{1}{m}\lambda_{+++}^{L_1} > 0. \quad (207)$$

Dadurch, dass dieser Eigenwert reell und positiv ist, ist dieser Punkt instabil.

Eigenwerte bei L_2 . Wieder die Werte aus der Tabelle in 5.6.2 in (201) eingesetzt, ergibt

$$\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_2} = \rho\sqrt{1 + \delta\sqrt{1 + 27}} \cdot \Omega^2. \quad (208)$$

Das ist gleich

$$\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_2} = \rho\sqrt{1 + \delta 2\sqrt{7}} \cdot \Omega^2. \quad (209)$$

Wegen $2\sqrt{7} > 2$ ergibt sich bei $\delta = \rho = +1$

$$\frac{1}{m}\lambda_{+++}^{L_2} > 0, \quad (210)$$

wodurch auch L_2 instabil ist.

Eigenwerte bei L_3 . Hier wird (201) zu

$$\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_3} = \rho\sqrt{-\frac{3}{2} + \delta\sqrt{\frac{9}{4} + 2}} \cdot \Omega^2. \quad (211)$$

Vereinfacht ist dies gleich

$$\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_3} = \rho\sqrt{-\frac{3}{2} + \delta\frac{1}{2}\sqrt{17}} \cdot \Omega^2. \quad (212)$$

Ähnlich wie für L_1 und L_2 gilt $\frac{1}{2}\sqrt{17} > \frac{3}{2}$ weshalb bei $\delta = \rho = +1$

$$\frac{1}{m}\lambda_{+++}^{L_3} > 0 \quad (213)$$

ist. Dadurch ergibt sich auch hier, dass L_3 instabil ist.

Eigenwerte bei L_4 und L_5 . Da d in (201) in der 2. Potenz vorkommt, brauchen wir wegen dem veränderten Vorzeichen bei d von L_4 und L_5 nicht zu unterscheiden. Somit erhalten wir

$$\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_4/L_5} = \rho\sqrt{-\frac{1}{2} + \delta\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{16}(1 - \kappa^2)}} \cdot \Omega^2. \quad (214)$$

κ soll gleich $\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}$ sein, weshalb $|\kappa| \leq 1$ ist. Damit erhält man $0 \leq (1 - \kappa^2) \leq 1$. Somit ist die innere Wurzel kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ oder imaginär. Dementsprechend müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen.

Ist $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{16}(1 - \kappa^2)} < \frac{1}{2}$, gilt

$$\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_4/L_5} \text{ ist imaginär.} \quad (215)$$

Somit sind L_4 und L_5 stabil und Objekte nahe dieser Koordinaten würden eine zirkuläre Umlaufbahn um den Lagrangepunkt annehmen. Wenn aber die Wurzel imaginär ist, wird $\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_4/L_5}$ komplex, wodurch der Punkt nicht mehr stabil ist. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$\frac{1}{4} - \frac{27}{16}(1 - \kappa^2) > 0 \quad (216)$$

und damit

$$\kappa^2 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} > \frac{23}{27}. \quad (217)$$

Die beiden Massen M_1 und M_2 müssen also (217) erfüllen, damit L_4 und L_5 stabil sind. Weiterhin gibt es den Spezialfall $\kappa = 1$ wenn $M_2 = 0$ ist, wofür die Eigenwerte $\frac{1}{m}\lambda_{\rho\delta}^{L_4/L_5} = 0$ sind, jedoch ist dieser Fall für die Realität nicht weiter relevant.

4.7 Anwendung

Nach den Berechnungen der Lagrange-Punkte und deren Stabilitätsanalyse möchte ich mich nun deren Anwendung und praktischer Bedeutung zuwenden. Dazu gehe ich auf Missionen ein, bei denen die Punkte im Mittelpunkt stehen, zeige interessante Fakten, die man auf sie zurückführt und gebe einen kleinen Ausblick auf das Zukunftsdenken einiger Menschen.

Im Moment gibt es zwei Missionen zu den Lagrangepunkten des Sonne-Erde-Systems, eine von der NASA und eine von der ESA. Die Mission der NASA heißt Genesis und hat zum Ziel, kosmischen Staub um L_1 zu sammeln. Die Wissenschaftler erhoffen, sich dadurch Kenntnisse über die Entstehung des

Spacecraft Bus Post TCM-14 Propagation

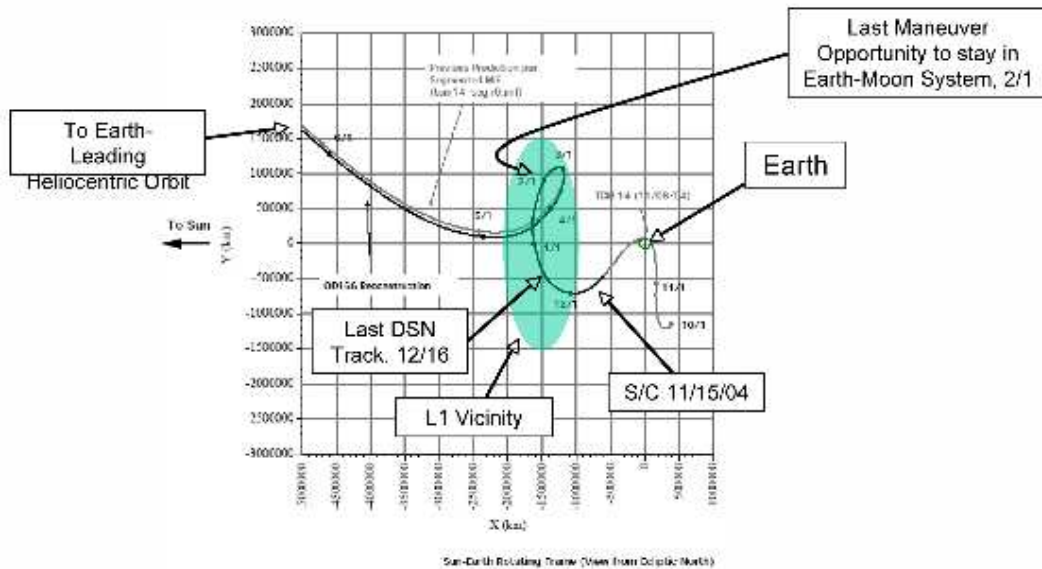


Abbildung 18: TCM-Manöver von Genesis (aus [8])

Sonnensystems anzueignen. Man will von den dortigen sehr dichten und von der Sonne wegströmenden Sonnenwinde und Materialien neue Anhaltspunkte für die Anfänge unseres Systems ableiten. Genesis besteht aus einer Sonde, die am 8.8.2001 startete und auf komplizierten Bahnen zu L_1 flog (zu sehen in Abb. 18), um dort ihren Kollektor auszufahren und Partikel aufzunehmen. Man sieht, dass durch die besonderen Eigenschaften dieses Lagrangepunktes eine Möglichkeit zur Erforschung des Sonnensystems entsteht. Interessanterweise konnten wir vor wenigen Monaten im September die Rückkehr der Genesis-Raumsonde in den Nachrichten beobachten, denn es gab eine Panne beim Eindringen des Behälters in die Atmosphäre, woraufhin dieser abstürzte und glücklicherweise intakt geborgen werden konnte.

Die europäische Weltraumbehörde ESA will ihre eigene Mission zu einem Lagrange-Punkt starten, mit welchem sie andere Ziele verfolgt. Die Mission ist bekannt unter dem Namen Darwin und wird voraussichtlich 2014 starten, wobei Nebenmissionen schon 2006 beginnen sollen. Die ESA hat ehrgeizige Ziele: sie will nach Leben auf erdähnlichen Planeten außerhalb unseres Sonnensystems suchen und Spuren von lebensfreundlichen Planeten entdecken. Dazu besteht sie aus einer ganzen Flotte von Weltraumteleskopen, insgesamt 6 Stück. Diese werden zu L_2 des Sonne-Erde-Systems geschickt um dort ihre 1,5m großen Teleskope auszufahren, die dann im infraroten Spektrum scan-

nen sollen. Es gibt wichtige Gründe warum Darwin bei L_2 positioniert wird: einmal, weil dann keine Planeten im Weg sind, wie es im Erdorbit der Fall wäre, und weil keine Interferenzen durch die Strahlung der Erde auftreten. Außerdem lässt sich die Flotte dort gut halten, denn es sind nur aller paar Monaten kleine Manöver notwendig. Zusätzlich zu dieser Mission sollen noch Herschel, Planck, JWST und Gaia zu L_2 fliegen, welche alle eher starten, jedoch denke ich, dass Darwin ein sehr anschauliches Beispiel ist. Diese Informationen stammen aus [10].

Ein weiteres sehr interessantes Beispiel für die Lagrange-Punkte ist das Objekt J002E3, wie es die NASA bezeichnet. Dies entdeckte Bill Yeung am 3.9.2002 in einem Orbit um unseren Planeten. Das eigenartige war, dass es ungefähr doppelt so weit entfernt war wie der Mond und sich sehr schnell bewegte. Genauere Untersuchungen ergaben, dass es sich vermutlich um eine Antriebsstufe von Apollo 12 handelte. Die NASA erklärt dies so, dass der Lagrange-Punkt L_1 die Stufe "einfing" und hier gewissermaßen als "Portal" wirkt, was den Übergang vom Gravitationsfeld der Sonne zu dem der Erde darstellt. Dadurch flog das Objekt nicht weiter auf seinem sonnensynchronen Orbit, sondern umkreiste fortan die Erde. Dieser Effekt tritt auch beim Jupiter auf, der von vielen Kometen getroffen wird, wie z.B. Shoemaker-Levy 9 im Jahre 1994. Dort fängt Jupiter mit seinen Lagrange-Punkten die Kometen ein.

Aber Jupiter fängt mit seinem Gravitationsfeld nicht nur Kometen ein, die auf ihn stürzen, sondern er sammelt sie auch, wodurch sich das bekannte Asteroidenfeld zwischen Mars und Jupiter gebildet hat. Dies sieht man in Abb. 19. Man kann das Entstehen dieses Gebietes mit über 6000 Asteroiden, deren Bahn man berechnen konnte, auf die Lagrange-Punkte zurückführen, denn diese rotieren mit um die Sonne und es wirkt, als ob sie "gefangen" wären. Man sieht, dass natürliche Effekte der Lagrange-Punkte im Sonnensystem ständig beobachtet werden können.

Als letztes möchte ich nun noch kurz auf die sogenannte "L5 Society" eingehen, die sich in den 70er und 80er Jahren dafür einsetzte, eine Raumstation bei L_5 des Erde-Mond-Systems zu errichten. Da L_5 stabil ist, wie in Kapitel 5.6.3 gezeigt, würde eine solche Raumstation eine zirkuläre Umlaufbahn um den Punkt einnehmen und sich damit relativ zu Mond und Erde kaum bewegen. Dies würde den Energieaufwand stark verringern, da das Gravitationsfeld praktisch mithilft. Diese Organisation plante, die Raumstation mit Hilfe von Mondmaterialien zu bauen und dann eine Art Produktionsanlage für SPS-Satelliten zu errichten. Ein entsprechendes Schema kann man in Abb. 20 sehen. SPS-Satelliten sind "Solar Power Station", die sehr effizient Energie von der Sonne gewinnen sollen. Die USA versuchte derartige Forschungen, bis man das Projekt wegen zu hohem Kostenaufwand beendete.

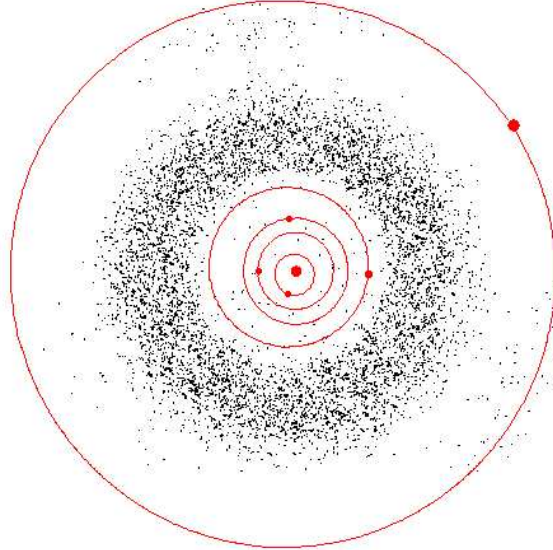


Abbildung 19: Asteroidenfeld zwischen Mars und Jupiter (aus [9])

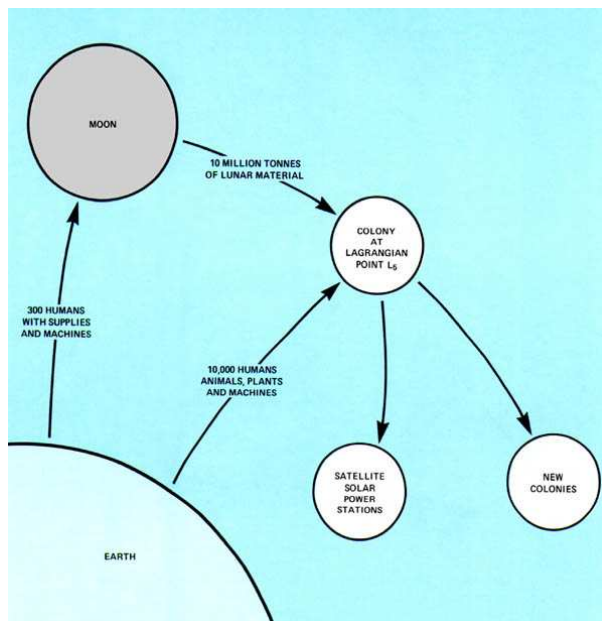


Abbildung 20: Das L_5 -Szenario der L_5 Society (aus [11])

Diese Station wurde nie gebaut, wobei Prof.Dr.G.K. O’Neill, ein bekannter Vordenker auf dem Gebiet der Weltraumkolonisation, vorraussagte, dass man Anfang der 90er Jahre technisch bereits dazu in der Lage sein würde. Die L5 Society wurde 1987 in die National Space Society integriert, wo ähnliche Bestrebungen, die Lagrange-Punkte effizient zu nutzen, noch heute vertreten werden.

Mit diesen Anwendungen und natürlichen Beispielen sollte es mir gelungen sein, Ihnen darzulegen, wie man die theoretischen Betrachtungen nutzen kann und wo man sie beobachtet. Wie man gut sieht, gibt es bereits viele Anwendungen und mit der Zeit werden sicher weitere hinzukommen.

4.8 Lagrange1-v0.0.2 – eine Illustration der Lagrange-Punkte

Mein erstes Programm namens Lagrange1 ist eine Visualisierung der Lagrange-Punkte. Dem Betrachter ist es möglich, die Punkte in einem ruhenden und einem rotierenden System zu sehen und damit einen Eindruck zu gewinnen, wie sich Koordinaten bei anderen Parametern verändern. Dazu betrachtet man die Graphik, bei der die beiden schwarzen Punkte die Massen und die roten Punkte die Lagrange-Punkte symbolisieren. Man kann die konstante Entfernung der beiden großen Massen, den Radius, angeben, wobei er hier ein Vielfaches des Erdradius darstellen soll. Mit den Angaben der Massen ist es möglich, das genaue Verhältnis α der Massen zu bestimmen, was für die Koordinaten der Lagrange-Punkte sehr wichtig ist. Der Geschwindigkeitsregler und die Zoom-Buttons sind lediglich für die Anzeige wichtig, verändern jedoch nichts am physikalischen Sachverhalt. Außerdem gibt es die Möglichkeit durch Klicken auf die Graphik die Koordinaten der großen Masse zu verändern und das rotierende System damit zu verschieben. Für zusätzliche Informationen zum Verlauf des Programms zeigt die Registerkarte “Ausgabe” die aktuellen Werte für den Winkel φ des rotierenden Systems, die bereits verstrichene Zeit t und die Umlaufzeit T an.

Mit dem Button “Start/Stop” startet man die Darstellung bzw. hält sie an. “Reset” stellt alle Werte auf den Anfangszustand zurück und “Schließen” beendet das Programm. Um so höher der Geschwindigkeitsregler eingestellt ist, um so schneller läuft das Programm. Mit Hilfe des “+”-Zoom Buttons ist der Benutzer in der Lage an das Geschehen heranzuzoomen, wobei der Rotationspunkt an seiner Stelle bleibt.

Die Funktionsweise des Programms ist zu kompliziert, um sie hier zu erklären, deshalb verweise ich auf die kommentierten Quelltexte im Anhang.

4.9 Lagrange2-v0.0.4 – ein Programm zur Simulation der Bewegungen nahe der Lagrange-Punkte

Das nächste Programm für die Lagrange-Punkte, Lagrange2, ist ein Programm zur Simulation der Bewegungen eines Körpers im Gravitationsfeld, wie in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben. Es geht darum, die bewiesene Stabilität bzw. Instabilität am Computer zu visualisieren. Den Kern bildet dabei die Kräfteberechnung, die koordinatenweise funktioniert und von vielen Optionen und Optimierungen begleitet wird. Auch hier finden sich im Anhang die kommentierten Quelltexte, um die Programmierweise besser zu verstehen. Einige Funktionen, wie die Anzeige der Lagrange-Punkte aus Lagrange1, habe ich übernommen, da man sie zum besseren Verständnis benötigt.

Nun möchte ich noch kurz die Steuerung des Programms beschreiben, denn es gibt überaus viele Möglichkeiten die Ausgangssituation und die Anzeige zu beeinflussen.

Die Registerkarte “Konfiguration” enthält Möglichkeiten zum Verändern der Anfangsparameter. Darunter sind die Massen m , M_1 und M_2 und der Radius R , der der konstante Abstand zwischen den beiden großen Massen sein soll. Das zusätzliche Popup-Menü gibt dem Benutzer die Möglichkeit, die Anfangsposition und Geschwindigkeit der Masse m frei zu wählen oder auf die Lagrangepunkte zu legen mit Anfangsgeschwindigkeit Null. Das “frei wählen” funktioniert durch Klicken auf das Bild und darauffolgendes Aufziehen des Geschwindigkeitsvektors. Die Einstellungen zur Masse und zum Radius werden durch den Button “Neu” übernommen, woraufhin sich auch die Option zum Wählen der Koordinaten öffnet. Wie gewohnt wird die Simulation mit “Start/Stop” gestartet und angehalten. Die Registerkarte “Anzeige” enthält noch weitere Optionen. Die oberste Checkbox⁴ “Geschwindigkeit” ermöglicht das Angeben des anfänglichen Geschwindigkeitsvektors bzw. dessen Deaktivierung. “Spur” ermöglicht das Anzeigen der Bewegung der Punkte, wodurch man den Verlauf und die Bahn genauer sieht. Wenn man dies aktiviert, erhält man zusätzlich die Möglichkeit die roten Pixel der Lagrangepunkte herauszufiltern, wodurch man eine bessere Übersicht erhält, die Geschwindigkeit jedoch stark verringert. Die beiden Radio-Buttons⁵ “Rotation” ermöglichen das An- und Ausschalten der Rotation des rotierenden Bezugssystems, damit man die Möglichkeit erhält, nur das Inertialsystem zu betrachten und auch eine Vorstellung von der rotierenden Ansicht gewinnt. Zu Optimierungszwecken habe ich die Möglichkeit eingebaut, eine

⁴Kontrollkästchen mit Häkchen zum Aktivieren, unabhängig von anderen Optionen

⁵aktivierbarer Kreis mit schwarzem Punkt, innerhalb einer “Radiogroup” kann nur ein Radio-Button angeklickt sein

Energiebegrenzung mit dem gleichnamigen Button zu aktivieren, wodurch der Energieerhaltungssatz "besser" eingehalten wird und die Bewegungen etwas realistischer ablaufen. Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichungen wurden hier numerisch durch das einfachste Differenzschema erzeugt. Dabei ist nicht automatisch gesichert, dass die Erhaltungsgrößen Energie, Drehimpuls und der Lenz-Runge-Vektor im Verlauf der Simulation konstant bleiben. Hierfür wären wesentlich kompliziertere numerische Verfahren notwendig, siehe z.B. [12] und [13]. Stattdessen gibt es in Lagrange2 die Option, die Energie durch ein Reset der Geschwindigkeiten näherungsweise konstant zu halten. Die letzte Checkbox "Zoom" enthält die Möglichkeit, an L_5 zu "zoomen", das Inertialsystem zu betrachten und dabei kleine Auslenkungen zu ermöglichen, wodurch man in der Lage ist, abzuschätzen, inwiefern das Programm gute Näherungen ermöglicht und den Sachverhalt realistisch darstellt. Dadurch wird die Rotation deaktiviert und der Lagrangepunkt in die Mitte des Fensters gelegt. Zusätzlich kann man mit dem Schieberegler die Zoomstärke verändern und noch näher an den Lagrange-Punkt fahren. Abschließend gibt es unten noch zwei Buttons "Reset" und "Schließen", welche das Zurückstellen aller Werte bzw. das Beenden des Programms zur Folge haben.

5 Persönliche Erfahrungen

5.1 Gelerntes

In diesem Kapitel möchte ich schildern, was ich in den 12 Monaten, die ich für die BeLL genutzt habe, gelernt habe. Natürlich musste ich mich mit dieser Art der Physik, die doch recht stark von der üblichen Schulphysik abweicht, sehr stark auseinandersetzen. Dadurch ist klar, dass sich auf diesem Gebiet mein größter Wissensanstieg finden lässt, jedoch konnte ich auch sehr viele andere Dinge lernen. Von mathematischen Verfahren über wissenschaftliche Standards bis hin zum Umgang mit LaTeX erfuhr ich auf sehr überwältigende Art und Weise.

Zunächst führe ich die wissenschaftlichen Aspekte aus, welche physikalische Denkweisen, Begründungen und mathematische Prozeduren beinhalten. Z.B. musste ich mich zu Anfang der BeLL in die Grundlagen klassischer Mechanik einarbeiten, um überhaupt eine Chance zu haben, den Sachverhalt zu begreifen. Dazu erarbeitete ich selbstständig oder mit Hilfe meines externen Betreuers Prof. Dr. Behn die Zusammenhänge physikalischer Vektorgrößen, skalarer Größen und Tensoren. Ich lernte viel über Matrizen, wie man sie verwendet, zu was sie fähig sind und darüber hinaus ihre Bedeutung für die lineare Stabilitätsanalyse. Weiterhin benötigte ich elementares Grundwissen zu Vektoren, weshalb ich Schulstoff aus dem Mathematik-Leistungskurs Klasse 12 und noch mehr bereits viel früher erlernen musste. Auch Näherungsverfahren wie Störungstheorie betrachtete ich sehr sorgfältig und konnte somit einen Eindruck von der "höheren Mathematik" gewinnen. Zusätzlich hatte ich erste Einblicke in physikalische Ansichten, wie das Vernachlässigen unbedeutender Größen bzw. die absichtliche Näherung von Werten und die Begründung der Zulässigkeit dieser Maßnahmen. Letzteres konnte z.B. durch eine Taylor-Reihenentwicklung und das Vernachlässigen höherer Glieder geschehen. Die in der Schule häufig benutzte Näherung für kleine α

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha \quad (218)$$

kann damit erklärt werden, dass die Taylor-Reihenentwicklung der beiden Funktionen⁶ im ersten Glied übereinstimmt (für α in Bogenmaß):

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \quad (219)$$

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \dots \quad (220)$$

⁶Aus [14] entnommen

Ein anderes Beispiel wäre die Begründung der Funktionsweise des Raketenantriebs mit Hilfe des Impulserhaltungssatzes. Wenn von außen keine Kraft auf die Rakete wirkt gilt

$$\sum_{i=1}^n p_i = \text{const.} \quad (221)$$

Stößt die Rakete dann Teilchen nach hinten aus, verfügen diese über einen Impuls. Da aber (221) gilt, muss die Rakete über einen Impuls mit anderem Vorzeichen verfügen, dessen Betrag so groß ist wie die Summe der einzelnen Impulse der ausgestoßenen Teilchen. Deshalb wirkt auf die Rakete eine Kraft in die andere Richtung. Dies sind nur zwei einfache Beispiele für Erkenntnisse in den Bereichen Mathematik und Physik, die ich gewonnen habe.

Als nächstes möchte ich einige allgemeine Sachen nennen, die in allen Fächern wichtig sind und die ich gelernt habe. Als erstes wäre da die zeitliche Einteilung einer solchen langfristigen Arbeit zu nennen. Da dies meine erste Arbeit über ein ganzes Jahr war, für die ich ein Thema völlig frei wählen konnte und mich selbst um Hilfe und Quellen kümmern musste, war ich sofort gezwungen, das Jahr genauestens zu planen und wirklich gleich zu beginnen. Da mein Thema auch sehr speziell und weitgehend ist, war es außerdem nötig, nach detaillierteren Quellen zu suchen, als es im normalen Schulalltag notwendig ist. So lernte ich Möglichkeiten kennen, wissenschaftliche Publikationen und Bücher besser zu finden und zu verstehen.

Doch ich habe noch mehr Dinge gelernt als naturwissenschaftliche Fakten und allgemeine Vorgehensweisen. Da ein relativ großer Teil meiner Arbeit darin bestand, Programme zu kreieren, die die erarbeiteten Sachverhalte darstellen, beschäftigte ich mich intensiv mit Programmierungsmöglichkeiten physikalischer Prinzipien. Ich habe mir selbständig Möglichkeiten ausgedacht, wie die Programme die Physik visualisieren können und wie es möglich ist, diese zu optimieren und so realistisch wie möglich zu machen. Dazu betrieb ich Nachforschungen über etwaige Varianten die numerischen Fehler, die bei einer solchen Integration auftreten, zu minimieren. Doch abgesehen von dem Vermeiden von Fehlern musste ich mir Gedanken machen, wie man das Problem anschaulich darstellen kann. Dies beinhaltet insbesondere Rotationen der Objekte, da sich die Planeten im Sonnensystem um die Sonne bewegen. Neben der Programmierung in C++ konnte ich aber noch Erfahrungen auf einem anderen Gebiet der Programmierung gewinnen. Damit meine ich TeX und hier speziell eine Variante davon: LaTeX. LaTeX ist eine Sprache, mit der man sehr einfach Texte und kleine Programme auf eine sehr anschauliche Art und Weise erstellen kann. Durch die simple Handhabung und die perfekte Visualisierung von Gleichungen und mathematischen Ausdrücken ist LaTeX der Standard in der Physik. Da ich sehr viele Gleichungen in meiner Arbeit

verwende, entschied ich mich, diese Sprache für meine BeLL zu benutzen und konnte so sehr viele Erfahrungen auf diesem Gebiet sammeln (z.B. mit Hilfe [15]), die man auch im Studium und sogar noch danach sehr gut gebrauchen kann.

5.2 Persönlicher Eindruck

Abschließend nach 12 Monaten harter Arbeit stellt man sich natürlich die Frage, was einem die BeLL gebracht hat und was man daraus mitnimmt. Mein Eindruck in dieser Hinsicht ist ganz klar, das Ausarbeiten hat mir sehr viel gegeben! Die im vorangehenden Kapitel genannten gelernten Sachen sind sehr beachtlich und ich bin überzeugt, dass ich diese Fähigkeiten in meinem späteren Leben benutzen werden kann. Außerdem gewann ich einen guten Einblick in die theoretische Physik, ihre Methoden und Strukturen. Mein Eindruck davon war durchweg positiv und hat mein Interesse für die Physik noch weiter verstärkt, so dass ich in meinem Bestreben Physik zu studieren, bestätigt wurde.

6 Zusammenfassung

Nun möchte ich kurz erwähnen, was wir alles getan haben. Zuerst erwähnte ich einige Probleme, denen man bei der Raumfahrt gegenübersteht, zeigte prinzipielle Herangehensweisen an die Kursfindung und einige Lösungen. Danach erklärte ich den Hohmann-Transfer-Orbit am Beispiel Erde-Mars näher, berechnete Transferzeiten u.ä. und simulierte abschließend den Sachverhalt in einem Programm. Ähnlich ging ich bei den Lagrange-Punkten vor, wobei ich hier die Koordinaten und danach mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse die Stabilität berechnete. Nach einigen Beispielen für die Anwendung widmete ich mich auch hier der Simulation in Form von zwei Programmen. Ich denke, dass man mit Hilfe dieser Berechnungen und Erklärungen die angesprochenen Dinge sehr gut verstehen kann.

Am Anfang meiner BeLL meinte ich, dass derartige Denkweisen einen Grundpfeiler für unsere zukünftige Gesellschaft bilden würden. Die vielen Anwendungen der beiden hier hergeleiteten Prinzipien zeigen, dass wir bereits begonnen haben, sie zu nutzen und das in Zukunft ausbauen werden. Dementsprechend sind die Grundlagen vorhanden: wir können es theoretisch begründen, wir können es simulieren, wir müssen es nur noch verwenden!

Abgesehen von diesen Folgen für die Gesellschaft kann ich noch klar und deutlich folgern, dass die Raumfahrt für sich bereits sehr viel Potential durch die Hohmann-Ellipse und die Lagrange-Punkte bekommen hat.

A Taylorreihenentwicklung

Der Satz von Taylor besagt:

Eine Funktion f sei in $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ ($\alpha > 0$) $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Dann gilt für $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ die Taylorreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x - x_0)^v + R_n(x) \quad (222)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0, 1). \quad (223)$$

Dies stammt aus [14] und ist eine Entwicklung einer Funktion an einem bestimmten Punkt x_0 .

B Partielle Ableitung

Diese Definition kommt aus [14] und ist grundlegend für die Arbeit mit zwei Variablen.

Sei

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad (224)$$

dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + h, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{h}, \quad (225)$$

wenn der Grenzwert existiert.

Im Prinzip ist dies also eine gewöhnliche Ableitung, wenn man die anderen Variablen als konstante Parameter auffasst. Dementsprechend können wir auch die bekannten Differentiationsregeln anwenden.

C Gradient einer skalaren Funktion

In [7] findet man die Definition des sogenannten Gradientenfeldes:

Einem stetig differenzierbaren skalaren Feld $\varphi(\mathbf{r})$ wird an jedem Raumpunkt \mathbf{r} ein vektorielles Feld, das sogenannte Gradientenfeld, zugeordnet:

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right). \quad (226)$$

Für die bei der Stabilität genutzte Ableitung gilt der Ausdruck

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} = -\text{grad } U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (227)$$

D Divergenz einer vektoriellen Funktion

Die Schreibweise $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}}$ soll bedeuten

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (228)$$

Damit ist $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}}$ die sogenannte Divergenz bzw. das Quellenfeld von $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, wobei dem Vektorfeld ein skalares Feld zugeordnet wird.

Der Operator div wird so definiert

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial x_j}, \quad (229)$$

wenn $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (a_1(\mathbf{r}), a_2(\mathbf{r}), a_3(\mathbf{r}))$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld ist, wobei $x_{1,2,3}$ die Koordinaten von \mathbf{r} im \mathbb{R}^3 sein sollen (aus [7]).

E Quelltexte

Die Quelltexte sind mit Borland C++ Builder 6 geschrieben, weshalb Kommentare mit `//` oder `/*` am Anfang und `*/` am Ende gekennzeichnet sind. Teilweise sind einige Prozeduren in extra Dateien ausgelagert, diese werden am Anfang integriert und ihre Quelltexte stehen nach den Hauptdateien. Es wurde ausschließlich VCL Programmierung durchgeführt. Da C++ sehr lange Zeilen erlaubt, gibt es in den Quelltexten einige unerwartete Zeilenumbrüche. Ich denke allerdings, dass es immer noch lesbar ist und bitte Sie dies zu entschuldigen.

E.1 Hohmann2

```
//-----  
  
#include <vcl.h>  
#pragma hdrstop  
  
#include "UEllipse.h"  
#include "PEllipse1.h"  
#include <math.h>  
//-----  
#pragma package(smart_init)  
#pragma resource "*.dfm"  
TForm1 *Form1;  
//-----
```

```

__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
    : TForm(Owner)
{
}
//-----
int x,y,xstart,ystart,T1; //Positionen und Umlaufzeitvariablen deklarieren
double t = 0; //Zeitvariable
double fver,frad1,frad2,p,e,T2,T,L,r,tv,t0,phi1,phi2,phix,omega3; //Physikalische Parameter
double phidiff = 0; //Winkeldifferenz
bool backtwice = false; //Boolwert für Ankommen auf Erde
bool on = false; //Boolwert für Aktivierung des Timers
bool back = false; //Boolwert für Aktivierung des Rückfluges
void __fastcall TForm1::BStartClick(TObject *Sender)
{
    //Aktivierung Timer-Variable
    if (on == false)
        on = true;
    else on = false;
    //Radien einlesen und Verhältnis berechnen
    frad1 = ERad1->Text.ToDouble();
    frad2 = ERad2->Text.ToDouble();
    fver = frad2 / frad1;
    //Umlaufzeiten der Planeten u. des Schiffs berechnen, sowie Ellipsenparameter
    T1 = pow(frad1,3.0/2.0) * 365; //Umlaufzeit innerer Planet
    p = 2 * fver / ( 1 + fver ); //Halbparameter p
    e = ( 1 - 1 / fver ) / ( 1 + 1 / fver); //Exzentrizität e
    T2 = pow(fver,3.0/2.0) * T1; //Umlaufzeit äußerer Planet
    T = sqrt(pow((frad1 + frad2)/2,3) / pow(frad1,3) * pow(T1,2)); //Umlaufzeit Ellipse
    //Anzeigen der Bahneigenschaften
    LU2->Caption = T / 2;
    LE2->Caption = e;
    LP2->Caption = p;
    //Aktivieren des Timers
    if (on == true)
        Ts1->Enabled = true;
    else Ts1->Enabled = false;
    //Drehimpuls von Raumschiff (resultiert aus innerem Planet) und Abstand zu Sonne
    L = M_PI * ( frad1 + frad2 ) * sqrt(p * (frad1 + frad2) / 2.0) / T;
    //Rückflugzeitpunkt berechnen
    t0 = (T * 1.0 / T1 - 4 + T * 1.0 / T2) / (2 * (1.0 / T2 - 1.0 / T1));
}
//-----
/* 1 - innerer Planet
   2 - äußerer Planet
   3 - Sonde */

```



```

// Koordinaten
double y1 = 0;
double x1 = 0;
double y2 = 0;
double x2 = 0;
double y3 = 0;
double x3 = 0;
double phi3 = 0;
bool backonce = false; //Boolwert für einmalige Aktionen bei Rückflug
void __fastcall TForm1::Ts1Timer(TObject *Sender)
{
    //Geschwindigkeit der Zeit auslesen
    tv = TBv->Position / 5.0;
    //Zeit
    t = t + tv;
    //Bei Rückkehr zur Erde Ende
    if(t >= t0 + T / 2.0)
        {backtwice = true;
        back = false;}
    //Bei Rückflug Winkel aktualisieren (einmalig)
    if ((back == true) && (backonce == false))
        {
            backonce = true;
            phi3 = phi2;
            phix = phi3;
            phidiff = Diff(phi1,phi2);
        }
    //Abstand r von Sonne
    if (back == false)
        r = p / ( 1 + e * cos(phi3));
    else r = p / ( 1 + e * cos(phi3 + phix));
    //Winkelgeschwindigkeit für phi3 berechnen
    if (back == false)
        omega3 = L / pow(r,2);
    else omega3 = L * 1.095 / pow(r,2);
    //Winkel in Abhängigkeit von t
    phi1 = 2 * M_PI / T1 * t;
    phi2 = M_PI * ( 1 - T / T2 ) + 2 * M_PI / T2 * t;
    phi3 = phi3 + omega3 * tv;
    //Übermalen der alten Kreise/Löschen
    Form1->ISpace1->Canvas->Brush->Color = clWhite;
    Form1->ISpace1->Canvas->FillRect(ClientRect);
    //x und y Koordinaten berechnen aus Winkeln und Bahnen
    y1 = 190 / fver * sin(phi1);
    x1 = 190 / fver * cos(phi1);
    y2 = 190 * sin(phi2);
    x2 = 190 * cos(phi2);
    y3 = r * sin(phi3) * 190 / fver;
    x3 = r * cos(phi3) * 190 / fver;
}

```

```

//Anzeigen der aktuellen Werte
if (phi3 <= M_PI)
  {Form1->LCX2->Caption = FloatToStrF(x3,ffFixed,12,4);
  Form1->LCY2->Caption = FloatToStrF(y3,ffFixed,12,4);
  Form1->LPhi2->Caption = FloatToStrF(phi3 / M_PI,ffFixed,12,4) + " pi";
  LFlight->Caption = "Satellit auf dem Weg zum Ziel";}
if ((phi3 > M_PI) && (backtwice == false) )
  {Form1->LCX2->Caption = "";
  Form1->LCY2->Caption = "";
  Form1->LPhi2->Caption = "";
  LFlight->Caption = "Satellit bei Ziel angekommen";}
if ((t >= t0) && (backtwice == false))
  LFlight->Caption = "Satellit auf Rückweg";
if (backtwice == true)
  {Form1->LCX2->Caption = "";
  Form1->LCY2->Caption = "";
  Form1->LPhi2->Caption = "";
  LFlight->Caption = "Satellit zurückgekehrt";
  Ts1->Enabled = false;}
Form1->Lt2->Caption = t;
//Zeichnen der Bahnen
Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clBlack;
Form1->ISpace1->Canvas->Ellipse(10,10,390,390); //Bahn des äußeren Planeten
if(t < T / 2.0)
  {Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clRed;
  Form1->ISpace1->Canvas->Ellipse(10,200 - p / fver * 190,200 + 190 / fver,
200 + p / fver * 190);} //Anzeige der Hinflug-Ellipse
if(t > T / 2.0)
  {Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clRed;
  for(double alpha=0;alpha <= 2 * M_PI;alpha=alpha+0.01)
    {double r1 = p / (1 + e * cos(alpha + phix));
    Form1->ISpace1->Canvas->Pixels[200 + r1 * 190 /fver * cos(alpha)][200 +
r1 * 190/fver * sin(alpha)] = clRed; //Anzeige der Rückflug-Ellipse
  }
}
Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clBlack;
Form1->ISpace1->Canvas->Ellipse(200 - 190 / fver,200 - 190 / fver,200 + 190
/ fver,200 + 190 / fver );
//Zeichnen von Planeten und Raumschiff
Form1->ISpace1->Canvas->Brush->Color = clBlue;
Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clBlue;
Form1->ISpace1->Canvas->Ellipse(200 + x1 - 4,200 + y1 - 4,200 + x1 + 4,200
+ y1 + 4); //Zeichnen des inneren Planeten
Form1->ISpace1->Canvas->Brush->Color = clRed;
Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clRed;
Form1->ISpace1->Canvas->Ellipse(200 + x2 - 4,200 + y2 - 4,200 + x2 + 4,200
+ y2 + 4); //Zeichnen des äußeren Planeten
if ((phi3 <= M_PI) || (back == true))
  {

```

```

    Form1->ISpace1->Canvas->Brush->Color = clWhite;
    Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clBlack;
    Form1->ISpace1->Canvas->Ellipse(200 + x3 - 2,200 + y3 - 2,200 + x3 + 2,200
+ y3 + 2); //Zeichnen der Sonde
    }
    Form1->ISpace1->Canvas->Pen->Color = clYellow;
    Form1->ISpace1->Canvas->Brush->Color = clYellow;
    Form1->ISpace1->Canvas->Ellipse(193,193,207,207); //Zeichnen der Sonne
    //Rückflug
    if ((t > t0) && (backtwice == false))
        back = true;
    if (back == true)
    {
        Form1->LCX2->Caption = FloatToStrF(x3,ffFixed,12,4);
        Form1->LCY2->Caption = FloatToStrF(y3,ffFixed,12,4);
        Form1->LPhi2->Caption = FloatToStrF(phi3 / M_PI,ffFixed,12,4) + " pi";
    }
}
//-----
//für neuen Radius resetten
void __fastcall TForm1::BNeuClick(TObject *Sender)
{
    y1 = 0;
    x1 = 0;
    y2 = 0;
    x2 = 0;
    y3 = 0;
    x3 = 0;
    phi3 = 0;
    t = 0;
    r = frad1;
    backtwice = false;
    backonce = false;
    back = false;
}
//-----

```

PEllipse1.h:

```

#include <math.h>
//Prozedur zum Berechnen der Differenz zwischen zwei Winkeln
double Diff(double phi1,double phi2)
{
    double phi = phi1 - phi2;
    while (phi >= 2 * M_PI)
    {
        phi = phi - 2 * M_PI;
    }
    return phi;
}

```

```

}

//Prozedur zum Rechnen modulo 2pi
double ModPi(double phi)
{
while(phi >= 2 * M_PI)
{
phi = phi - 2 * M_PI;
}
return phi;
}

```

E.2 Lagrange1

```

//-----

#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include <math.h>
#include "HLaGrange1.h"

#include "ULaGrange1.h"
//-----
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;
//-----
int M1x, M1y, M2x, M2y, L1x, L2x, L3x, L4x, L5x, L1y, L2y, L3y, L4y, L5y, MX,
MY; //x und y Koordinaten der Objekte
int xs = 0; //Verschiebung in x Richtung
int ys = 0; //Verschiebung in y Richtung
double R,M1,M2,T,L,omega, tv, phi, a; //physikalische Parameter
double z = 1; //Zoom-Faktor
double t = 0; //Zeitvariable
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
: TForm(Owner)
{
}
//-----
void __fastcall TForm1::BStartClick(TObject *Sender)
{
//Parameter auslesen
R = LER->Text.ToDouble(); //Abstand der großen Massen einlesen
M1 = LEM1->Text.ToDouble(); //Masse M1 einlesen
M2 = LEM2->Text.ToDouble(); //Masse M2 einlesen
a = M2 * 1.0 / (M1 + M2); //Massenverhältnis berechnen
//Anfangskoordinaten setzen
M1x = 250; M1y = 250; //für M1
M2x = 250 + R * 100; M2y = 250; //für M2
}

```

```

MX = 250 + a * R * 100; MY = 250; //für Rotationszentrum
//Drehimpuls, Geschwindigkeit und Umlaufzeit von M2 berechnen
T = sqrt(pow(R,3)*pow(365,2)); //Umlaufzeit T
L = 2 * M_PI * pow(R,2) / T; //Drehimpuls dividiert durch Masse m
omega = L / ( pow(R,2) * M2); //Winkelgeschwindigkeit omega berechnen
//Timer aktivieren
if (ITime->Enabled == false)
    ITime->Enabled = true;
    else ITime->Enabled = false;
}
//-----
void __fastcall TForm1::ITimeTimer(TObject *Sender)
{
//Geschwindigkeit der Zeit auslesen
tv = (TBV->Position + 0.2) / 2.0 ;
//Zeit weiterrechnen
t = t + tv;
//Werte anzeigen
Lt2->Caption = FloatToStrF(t,ffFixed,7,0) + " d";
LUT2->Caption = FloatToStrF(T,ffFixed,7,0) + " d";
LPhi2->Caption = FloatToStrF(ModPhi(phi) / M_PI, ffFixed,7,2) + " pi";
//Winkel phi berechnen
phi = omega * t;
//Koordinaten berechnen
L1x = MX + z * (cos(phi) * (1 - pow(M2 / (3*(M1 + M2)),1/3.0) + M2 / (M1 + M2))
* R * 100);
L1y = MY - z * (sin(phi) * (1 - pow(M2 / (3*(M1 + M2)),1/3.0) + M2 / (M1 + M2))
* R * 100);
L2x = MX + z * (cos(phi) * (1 + pow(M2 / (3*(M1 + M2)),1/3.0) + M2 / (M1 + M2))
* R * 100);
L2y = MY - z * (sin(phi) * (1 + pow(M2 / (3*(M1 + M2)),1/3.0) + M2 / (M1 + M2))
* R * 100);
L3x = MX + z * (cos(phi) * (- 1 - 5 / 12.0 * M2 / (M1 + M2) + M2 / (M1 + M2))
* R * 100);
L3y = MY - z * (sin(phi) * (- 1 - 5 / 12.0 * M2 / (M1 + M2) + M2 / (M1 + M2))
* R * 100);
L4x = MX + z * (cos(phi + M_PI / 3.0) * R * 100);
L4y = MY - z * (sin(phi + M_PI / 3.0) * R * 100);
L5x = MX + z * (cos(phi - M_PI / 3.0) * R * 100);
L5y = MY - z * (sin(phi - M_PI / 3.0) * R * 100);
M2x = MX + z * (cos(phi) * R * 100);
M2y = MY - z * (sin(phi) * R * 100);
M1x = MX + z * a * R * 100 * cos(phi + M_PI);
M1y = MY - z * a * R * 100 * sin(phi + M_PI);
//Löschen des Bildes
ISpace->Canvas->Brush->Color = clWhite;
ISpace->Canvas->FillRect(ClientRect);
//Zeichnen der neuen Bilder
ISpace->Canvas->Pen->Color = clBlack;

```

```

ISpace->Canvas->Brush->Color = clBlack;
//Masse M1
ISpace->Canvas->Ellipse(M2x - 3 + xs,M2y - 3 + ys,M2x + 3 + xs,M2y + 3 + ys);
//Masse M2
ISpace->Canvas->Ellipse(M1x - 3 + xs,M1y - 3 + ys,M1x + 3 + xs,M1y + 3 + ys);
ISpace->Canvas->Brush->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Pen->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Ellipse(L1x - 2 + xs,L1y - 2 + ys,L1x + 2 + xs,L1y + 2 + ys);
ISpace->Canvas->Ellipse(L2x - 2 + xs,L2y - 2 + ys,L2x + 2 + xs,L2y + 2 + ys);
ISpace->Canvas->Ellipse(L3x - 2 + xs,L3y - 2 + ys,L3x + 2 + xs,L3y + 2 + ys);
ISpace->Canvas->Ellipse(L4x - 2 + xs,L4y - 2 + ys,L4x + 2 + xs,L4y + 2 + ys);
ISpace->Canvas->Ellipse(L5x - 2 + xs,L5y - 2 + ys,L5x + 2 + xs,L5y + 2 + ys);
}
//-----
void __fastcall TForm1::BZoom1Click(TObject *Sender)
{
z = z * 1.1; //Zoom-Faktor erhöhen
}
//-----

void __fastcall TForm1::BZoom2Click(TObject *Sender)
{
z = z / 1.1; //Zoom-Faktor verkleinern
}
//-----
void __fastcall TForm1::ISpaceMouseDown(TObject *Sender,
    TMouseButton Button, TShiftState Shift, int X, int Y)
{
xs = X - 250; //Verschiebung in x-Richtung
ys = Y - 250; //Verschiebung in y-Richtung
}
//-----
//Zurücksetzen der Werte für Anzeige bei Reset
void __fastcall TForm1::BResetClick(TObject *Sender)
{
z = 1;
xs = 0;
ys = 0;
}
//-----

```

HLagrange1.h:

```

//Prozedur um modulo 2pi zu rechnen
double ModPhi(double a)
{
while(a >= 2 * M_PI)
{
a = a - 2 * M_PI;
}
}

```

```

    }
    return a;
}

```

E.3 Lagrange2

```

//-----
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include <math.h>
#include "LGP.h"

#include "ULaGrange2.h"
//-----
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;
//-----
bool neu = false; //Variable für Eingeben der Anfangsparameter
double vx,vy,fx,fy,x,y,x1,y1,x2,y2,R,a,m,tv,M1,M2,b,M1x,M1y,M2x,M2y,Fx,Fy,MX,
MY,T,omega,rL45,rR,phi1,v,vmax,phi2,energie; //Vereinbarung aller
physikalischen Variablen und Parameter
double phi = 0; //Drehwinkel des rotierenden Systems
double c = 1; //Zoomfaktor, c = 1 -> normal
int t; //Zeitvariable
int i = 1;
int z = 1;
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
    : TForm(Owner)
{
}
//-----
void __fastcall TForm1::BNeuClick(TObject *Sender)
{
//Ausgangskonfiguration eingeben bzw. einlesen
t = 0;
z = 1;
neu = true; //Koordinateneingabe aktivieren
R = ER2->Text.ToDouble(); //Einlesen Abstand der großen Massen
m = Em2->Text.ToDouble(); //Einlesen Masse m
M1 = EM12->Text.ToDouble(); //Einlesen Masse M1
M2 = EM22->Text.ToDouble(); //Einlesen Masse M2
a = M2 * 1.0 / (M1 + M2); //Berechnung Massenverhältnis a
b = M1 * 1.0 / (M1 + M2); //Berechnung Massenverhältnis b
x1 = 150; //Anfangs-x-koordinate M1
y1 = 250; //Anfangs-y-koordinate M1
x2 = 150 + R * 100; //Anfangs-x-koordinate M2
y2 = 250; //Anfangs-y-koordinate M2
}

```

```

MX = 150 + a * R * 100; //x-Koordinate des Rotationszentrum
MY = 250; //y-Koordinate des Rotationszentrum
T = sqrt(pow(R*30.0,3) / 1.0 * pow(365,2)); //Berechnung Umlaufzeit M2 um M1
rL45 = sqrt(pow(sqrt(3)/2.0*R*100,2)+pow(R/2.0,2));
//Bei Koordinatenanwahl Lagrange-Punktkoordinaten an m geben
switch(CBlp->ItemIndex)
{
case 1: x = 150 + a * R * 100 + 100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0)); y = 250;
break;
case 2: x = 150 + a * R * 100 + 100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0)); y = 250;
break;
case 3: x = 150 + a * R * 100 - 100 * R * (1 + 5 * a / 12.0); y = 250; break;
case 4: x = x1 + rL45 * cos(phi - M_PI / 3.0); y = y1 + rL45 * sin(phi - M_PI
/ 3.0); break;
case 5: x = x1 + rL45 * cos(phi + M_PI / 3.0); y = y1 + rL45 * sin(phi + M_PI
/ 3.0); break;
}
//einmaliges Zeichnen der Objekte
ISpace->Canvas->Pen->Color = clWhite;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clWhite;
ISpace->Canvas->FillRect(ClientRect);
ISpace->Canvas->Pen->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Ellipse(147,247,153,253); //Zeichnen von M1
ISpace->Canvas->Ellipse(147 + R * 100,247,153 + R * 100,253); //Zeichnen von M2
ISpace->Canvas->Pen->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)-2,
MY + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * sin(phi)-2,MX + (100 * R * (1 -
pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)+2,MY + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0))) *
sin(phi)+2); // Zeichnen von L1
ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)-2,
MY + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * sin(phi)-2,MX + (100 * R * (1 +
pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)+2,MY + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0))) *
sin(phi)+2); //Zeichnen von L2
ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0)) * cos(phi + M_PI)-2,
MY + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0)) * sin(phi + M_PI)-2,MX + (100 * R * (1 + 5 *
a / 12.0)) * cos(phi + M_PI)+2,MY + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0)) * sin(phi +
M_PI)+2); //Zeichnen von L3
ISpace->Canvas->Ellipse(x1 + rL45 * cos(phi - M_PI / 3.0)-2,y1 + rL45 * sin(phi
- M_PI / 3.0)-2,x1 + rL45 * cos(phi - M_PI / 3.0)+2,y1 + rL45 * sin(phi -M_PI
/ 3.0)+2); //Zeichnen von L4
ISpace->Canvas->Ellipse(x1 + rL45 * cos(phi + M_PI / 3.0)-2,y1 + rL45 * sin(phi
+ M_PI / 3.0)-2,x1 + rL45 * cos(phi + M_PI / 3.0)+2,y1 + rL45 * sin(phi +M_PI
/ 3.0)+2); //Zeichnen von L5
}
//-----
//Bei Anfangskonfiguration Pos.-Koordinaten und Geschwindigkeitsvektor
ermitteln

```



```

void __fastcall TForm1::ISpaceMouseDown(TObject *Sender,
    TMouseButton Button, TShiftState Shift, int X, int Y)
{
if((neu == true) && (CB1p->ItemIndex == 0))
{
z = z + 1; //Variable für Auswahl um eins erhöhen, damit andere Option
aktiviert wird
if(z == 2)
{
x = X; //x-Koordinate von Mauszeiger übernehmen
y = Y; //y-Koordinate von Mauszeiger übernehmen
ISpace->Canvas->Brush->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Pen->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Ellipse(X - 2,Y - 2,X + 2,Y + 2);
}
if((z == 3) && (CBv->Checked == true))
{
vx = (X - x) / 100000; //Geschwindigkeits-x-koordinate von zweitem Mausklick
übernehmen
vy = (Y - y) / 100000; //Geschwindigkeits-y-koordinate von zweitem Mausklick
übernehmen
}
}
}
//-----
//Bei Anfangskonfiguration Anzeigen des Bewegungsvektors
void __fastcall TForm1::ISpaceMouseMove(TObject *Sender, TShiftState Shift,
    int X, int Y)
{
//Anzeige des Geschwindigkeitsvektors bei manueller Eingabe
if((z == 2) && (neu == true) && (CBv->Checked == true)&& (CB1p->ItemIndex ==
0))
{
ISpace->Canvas->Brush->Color = clWhite;
ISpace->Canvas->Pen->Color = clWhite;
ISpace->Canvas->FillRect(ClientRect);
ISpace->Canvas->Pen->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Ellipse(147,247,153,253);
ISpace->Canvas->Ellipse(147 + R * 100,247,153 + R * 100,253);
ISpace->Canvas->MoveTo(x,y);
ISpace->Canvas->LineTo(X,Y); //Anzeige des Geschwindigkeitsvektors
ISpace->Canvas->Ellipse(x - 2,y - 2,x + 2,y + 2);
ISpace->Canvas->Pen->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0)))*cos(phi)
-2,MY + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0)))*sin(phi)-2,MX + (100 * R * (1
- pow(a / 3.0,1 / 3.0)))*cos(phi)+2,MY + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0
))) * sin(phi)+2);
}
}
}

```

```

    ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0)))*cos(phi)
-2,MY + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0)))*sin(phi)-2,MX + (100 * R * (1
+ pow(a / 3.0,1 / 3.0)))*cos(phi)+2,MY + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0
)))*sin(phi)+2);
    ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0))*cos(phi + M_PI)-
2,MY + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0))*sin(phi + M_PI)-2,MX + (100 * R * (1 +
5 * a / 12.0))*cos(phi + M_PI)+2,MY + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0))*sin(phi
+ M_PI)+2);
    ISpace->Canvas->Ellipse(x1 + rL45 * cos(phi - M_PI / 3.0)-2,y1 + rL45 * sin
(phi - M_PI / 3.0)-2,x1 + rL45 * cos(phi - M_PI / 3.0)+2,y1 + rL45 * sin(phi
- M_PI / 3.0)+2);
    ISpace->Canvas->Ellipse(x1 + rL45 * cos(phi + M_PI / 3.0)-2,y1 + rL45 * sin
(phi + M_PI / 3.0)-2,x1 + rL45 * cos(phi + M_PI / 3.0)+2,y1 + rL45 * sin(phi
+ M_PI / 3.0)+2);
}
}
//-----

void __fastcall TForm1::BStartClick(TObject *Sender)
{
//Timer-Aktivierung
i = i + 1; //Variable um zu unterscheiden, ob Start oder Stop
if(i % 2 == 0)
{
//Unterscheidung Zoom - Normal
if(CBZoom->Checked == false)
{
//Standardstartwerte für normale Ansicht
c = 1;
x1 = 150;
y1 = 250;
x2 = 150 + R * 100;
y2 = 250;
MX = 150 + a * R * 100;
MY = 250;
}
else
{
//Werte für Zoom-Ansicht
c = TBZoom->Position * 2;
x1 = 250 - 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
y1 = 250 - 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
x2 = 250 + 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
y2 = 250 - 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
MX = 250 - (b - a) / 2.0 * R * c * 100;
MY = 250 - sqrt(3) / 2.0 * R * c * 100;
}
TTime->Enabled = true;
}
}

```

```

else TTime->Enabled = false;
//Einmalige Kräfteberechnung und Winkelgeschwindigkeit für System
LKraft->Caption = KraftX(x,y,x1,y1,x2,y2,m,M1,M2,MX,MY,omega,v,phi,c);
//einmalige Anzeige der ersten Kraft in x-Richtung
omega = 2 * M_PI / T; //Berechnung der konstanten Winkelgeschwindigkeit
}
//-----

void __fastcall TForm1::TTimeTimer(TObject *Sender)
{
//Bei Spuraktivierung bzw. Spurdeaktivierung
if(CBSpur->Checked == true)
{if(CBRot->Checked == true)
{//Schleife um rote Pixel zu eliminieren
for(int i=1;i<500;i++)
{for(int k=1;k<500;k++)
{if(ISpace->Canvas->Pixels[i][k] == clRed)
ISpace->Canvas->Pixels[i][k] = clWhite;
}
}
}
}
}
}
else{//Löschen des Image-Bildes um Spur zu verhindern
ISpace->Canvas->FillRect(ClientRect);
}
//Zoom-Faktor
if(CBZoom->Checked == false)
c = 1;
if(CBZoom->Checked == true)
{
c = TBZoom->Position * 2; //Einlesen des Zoom-Faktors
//Verändern der Massenkoordinaten und Rotationspunktkoordinaten
x1 = 250 - 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
y1 = 250 - 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
x2 = 250 + 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
y2 = 250 - 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
MX = x1 + a * R * c * 100;
MY = y2 = 250 - 100 * c * cos(1.0 / 3 * M_PI);
}
//Zeitmanagement
tv = (TBTime->Position + 1) * 5; //Intervalllänge für Integration und
Zeitbeschleunigung einlesen
t = t + tv; //Zeit aufaddieren
//Winkelberechnung
if((RBRan->Checked == true) && (RBRAus->Checked == false))
phi = omega * t;
else phi = 0;
v = pow(pow(vx,2)+pow(vy,2),0.5); //Betrag von Geschwindigkeit berechnen
//Energie-Management
if(t == tv)

```

```

energie = Energie(x,y,x1,y1,x2,y2,m,M1,M2,v); //einmaliges Berechnen der
Energie von m
if((t > tv) && (CBEnergie->Checked == true))
  {vmax = sqrt(2.0 / m * (energie - Energie(x,y,x1,y1,x2,y2,m,M1,M2,v) + m /
2.0 * pow(v,2))); //Berechnen der maximalen Geschwindigkeit mit Hilfe der
kinetischen und potenziellen Energie
  if(v > vmax)
    {
      vx = vx * 1.0 / v * vmax; //"Kürzen" der x-Koordinate der Geschwindigkeit
nach Strahlensatz
      vy = vy * 1.0 / v * vmax; //"Kürzen" der y-Koordinate der Geschwindigkeit
nach Strahlensatz
      v = sqrt(pow(vx,2)+pow(vy,2)); //Aktualisieren des Geschwindigkeitsbetrages
bei Änderung
    }
  }
//Rotation des Massenpunktes
if((RBRan->Checked == true) && (RBRaus->Checked == false) && (CBZoom->Checked
== false))
{
phi2 = omega * tv; //Änderung des Winkels in einem Intervall
x = (x-MX)*cos(phi2)-(y-MY)*sin(phi2)+MX; //Rotation des Massenpunktes um phi2
für x-Koordinate
y = (x-MX)*sin(phi2)+(y-MY)*cos(phi2)+MY; //Rotation des Massenpunktes um phi2
für y-Koordinate
vx = vx*cos(phi2)-vy*sin(phi2); //Rotation der Geschwindigkeit des
Massenpunktes um phi2 für x-Koordinate
vy = vx*sin(phi2)+vy*cos(phi2); //Rotation der Geschwindigkeit des
Massenpunktes um phi2 für y-Koordinate
}
//Integration
Fx = KraftX(x,y,x1,y1,x2,y2,m,M1,M2,MX,MY,omega,v,phi,c); //Berechnung
der Kraft in x-Richtung
Fy = KraftY(x,y,x1,y1,x2,y2,m,M1,M2,MX,MY,omega,v,phi,c); //Berechnung
der Kraft in y-Richtung
vx = vx + Fx / m * tv; //Addition der Geschwindigkeiten in x-Richtung
vy = vy + Fy / m * tv; //Addition der Geschwindigkeiten in y-Richtung
//Koordinatenberechnung
if(CBZoom->Checked == false)
{
//Aktualisieren der Koordinaten des Massepunktes
x = vx * tv + x;
y = vy * tv + y;
//Rotieren der Koordinaten der großen Massen M1 und M2
x1 = MX + a * R * 100 * c * cos(phi + M_PI);
y1 = MY + a * R * 100 * c * sin(phi + M_PI);
x2 = MX + b * R * 100 * c * cos(phi);
y2 = MY + b * R * 100 * c * sin(phi);
}

```

```

if(CBZoom->Checked == true)
{
//Aktualisieren der Koordinaten des Massepunktes, ohne Rotation und bei Zoom
x = vx * tv + x;
y = vy * tv + y;
}
//Anzeige der Grafik
if(CBSpur->Checked == false)
{ISpace->Canvas->Pen->Color = clWhite;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clWhite;
ISpace->Canvas->FillRect(ClientRect);} //Löschen der Anzeige bei deaktivierter
Spur
ISpace->Canvas->Pen->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clBlack;
ISpace->Canvas->Ellipse(x1-3,y1-3,x1+3,y1+3); //Zeichnen Masse M1
ISpace->Canvas->Ellipse(x2-3,y2-3,x2+3,y2+3); //Zeichnen Masse M2
ISpace->Canvas->Ellipse(x-2,y-2,x+2,y+2); //Zeichnen Masse m
ISpace->Canvas->Pen->Color = clGreen;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clGreen;
ISpace->Canvas->Ellipse(MX-2,MY-2,MX+2,MY+2); //Zeichnen Rotationspunkt
//LaGrange-Punkte zeichnen
if(CBZoom->Checked == false)
{
ISpace->Canvas->Pen->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)-2
,MY + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * sin(phi)-2,MX + (100 * R * (1 -
pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)+2,MY + (100 * R * (1 - pow(a / 3.0,1 / 3.0))) *
sin(phi)+2);
ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)-2,
MY + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * sin(phi)-2,MX + (100 * R * (1 +
pow(a / 3.0,1 / 3.0))) * cos(phi)+2,MY + (100 * R * (1 + pow(a / 3.0,1 / 3.0))) *
sin(phi)+2);
ISpace->Canvas->Ellipse(MX + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0)) * cos(phi + M_PI)-2,
MY + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0)) * sin(phi + M_PI)-2,MX + (100 * R * (1 + 5
* a / 12.0)) * cos(phi + M_PI)+2,MY + (100 * R * (1 + 5 * a / 12.0)) * sin(phi +
M_PI)+2);
ISpace->Canvas->Ellipse(x1 + rL45 * cos(phi - M_PI / 3.0)-2,y1 + rL45 * sin(
phi - M_PI / 3.0)-2,x1 + rL45 * cos(phi - M_PI / 3.0)+2,y1 + rL45 * sin(phi
- M_PI / 3.0)+2);
ISpace->Canvas->Ellipse(x1 + rL45 * cos(phi + M_PI / 3.0)-2,y1 + rL45 * sin(
phi + M_PI / 3.0)-2,x1 + rL45 * cos(phi + M_PI / 3.0)+2,y1 + rL45 * sin(phi +
M_PI / 3.0)+2);
}
else
{
//L5 zeichnen bei Zoom
ISpace->Canvas->Pen->Color = clRed;
ISpace->Canvas->Brush->Color = clRed;

```

```

ISpace->Canvas->Ellipse(248,248,252,252);
}
//Anzeige der Labels, aktuelle Werte
LKraft->Caption = KraftX(x,y,x1,y1,x2,y2,m,M1,M2,MX,MY,omega,v,phi,c);
LEnergie->Caption = Energie(x,y,x1,y1,x2,y2,m,M1,M2,v);
LX->Caption = x;
LY->Caption = y;
LTime->Caption = t;
LPhi2->Caption = phi2;
Label1->Caption = MX;
Label2->Caption = MY;
}
//-----
//Sichtbarkeit von Rot-Option
void __fastcall TForm1::CBSpurClick(TObject *Sender)
{
if(CBSpur->Checked == true)
  {CBRot->Checked = false;
  CBRot->Visible = true;}
else
  {CBRot->Visible = false;
  CBRot->Checked = false;}
}
//-----
//Koordinatenänderung beim Ausschalten der Rotation
void __fastcall TForm1::RBRAusClick(TObject *Sender)
{
double rR = pow(pow(x-MX,2)+pow(y-MY,2),0.5);
double alpha = acos((x-MX) * 1.0 / rR);
double beta = alpha - phi;
x = (x-MX)*cos(beta)+(y-MY)*sin(beta)+MX;
y = -(x-MX)*sin(beta)+(y-MY)*cos(beta)+MY;
}
//-----
//Sichtbarkeit von Zoomsteuerung
void __fastcall TForm1::CBZoomClick(TObject *Sender)
{
if(TBZoom->Visible == false)
  {
  TBZoom->Visible = true;
  }
else TBZoom->Visible = false;
}
//-----
//Bei Zoom Anpassen der Bewegungskoodinaten
void __fastcall TForm1::TBZoomChange(TObject *Sender)
{
double d = c / TBZoom->Position;
x = (x-250)*d+250;
}

```

```

y = (y-250)*d+250;
vx = vx*d;
vy = vy*d;
}
//-----
//Zurücksetzen der Parameter bei Reset
void __fastcall TForm1::BResetClick(TObject *Sender)
{
t = 0;
x = 0;
y = 0;
vx = 0;
vy = 0;
fx = 0;
fy = 0;
phi = 0;
phi1 = 0;
phi2 = 0;
v = 0;
energie = 0;
omega = 0;
TTime->Enabled = false;
}
//-----

```

LGP.h:

```

#include <math.h>
//Modulo 2pi Rechnung
double ModPhi(int a)
{
while(a >= 2 * M_PI)
{
a = a - 2 * M_PI;
}
return a;
}
//Kraft an einem Punkt
double KraftX(double x,double y,double x1,double y1,double x2,double y2,
double m, double M1, double M2, double MX, double MY, double omega, double v,
double phi,double c)
{
double G = 0.00000000000667; //Gravitationskonstante
double r1 = sqrt(pow(x-x1,2)+pow(y-y1,2)); //Abstandsberechnung m-M1
double r2 = sqrt(pow(x-x2,2)+pow(y-y2,2)); //Abstandsberechnung m-M2
double rx1 = x - x1;
double rx2 = x - x2;
double rR = pow(pow(x-MX,2)+pow(y-MY,2),0.5); //Abstand r-Rotationszentrum
double Fx = - G / c * m * M1 * rx1 / pow(r1,3) - G / c * m * M2 * rx2 /

```

```

pow(r2,3) + m / c * pow(omega,2) * (x-MX) / rR - 2 / c * m * v * omega * (x-MX
) / rR; //Berechnung x-Komponente der Kraft
return Fx;
}

double KraftY(double x,double y,double x1,double y1,double x2,double y2,
double m, double M1, double M2, double MX, double MY, double omega, double v,
double phi,double c)
{
double G = 0.00000000000667; //Gravitationskonstante
double r1 = sqrt(pow(x-x1,2)+pow(y-y1,2)); //Abstandsberechnung m-M1
double r2 = sqrt(pow(x-x2,2)+pow(y-y2,2)); //Abstandsberechnung m-M2
double ry1 = y - y1;
double ry2 = y - y2;
double rR = pow(pow(x-MX,2)+pow(y-MY,2),0.5); //Abstand r-Rotationszentrum
double Fy = - G / c * m * M1 * ry1 / pow(r1,3) - G / c * m * M2 * ry2 /
pow(r2,2) + m / c * pow(omega,3) * (y-MY) / rR - 2 / c * m * v * omega * (y-MY)
/ rR; //Berechnung y-Komponente der Kraft
return Fy;
}

//Energieberechnung
double Energie(double x,double y,double x1,double y1,double x2,double y2,
double m,double M1,double M2,double v)
{
double G = 0.00000000000667; //Gravitationskonstante
double r1 = sqrt(pow(x-x1,2)+pow(y-y1,2)); //Abstandsberechnung m-M1
double r2 = sqrt(pow(x-x2,2)+pow(y-y2,2)); //Abstandsberechnung m-M2
double E = - G* m * M1 * 1.0 / r1 - G * m * M2 * 1.0 / r2 + m / 2.0 *
pow(v,2); //Berechnung der potenziellen und kinetischen Energie
return E;
}

```


Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Hohmann-Ellipse | 11 |
| 2 | Hohmann-Ellipse zu weiter außen liegendem Planeten (aus [3]) | 12 |
| 3 | Hohmann-Ellipse zu weiter innen liegendem Planeten (aus [3]) | 12 |
| 4 | Parameter einer Ellipse | 13 |
| 5 | Punkte in der Ellipse | 14 |
| 6 | Längen in der Ellipse | 15 |
| 7 | Winkel der Erde in Abhängigkeit von der Zeit | 17 |
| 8 | Winkel von Erde und Mars in Abhängigkeit von der Zeit . . . | 18 |
| 9 | Planetenkonstellation zu Beginn des Hinflugs | 19 |
| 10 | Planetenkonstellation zu Beginn des Rückfluges | 20 |
| 11 | Winkel und Zeiten im Diagramm | 21 |
| 12 | Potential im eingeschränktem Drei-Körper-Problem (aus [4]) . | 26 |
| 13 | Joseph-Louis Lagrange (aus [5]) | 27 |
| 14 | Vektoren im Inertialsystem | 30 |
| 15 | Gleichseitiges Dreieck der Körper | 37 |
| 16 | Längen auf der x-Achse | 38 |
| 17 | Lage der Lagrange-Punkte (aus [3]) | 39 |
| 18 | TCM-Manöver von Genesis (aus [8]) | 52 |
| 19 | Asteroidenfeld zwischen Mars und Jupiter (aus [9]) | 54 |
| 20 | Das L_5 -Scenario der L5 Society (aus [11]) | 54 |

Literatur

- [1] J.R. Wertz, Interplanetary round trip mission design, Paper No. IAC-03-Q.4.06, Bremen 2003
- [2] P. Wanner M.A. Texte der Abteilung Walter Hohmann und die Raumfahrt, <http://www.erfatal-museum.de/txt-welt.htm>, 2000
- [3] NASA, Basics of Space Flight, <http://www2.jpl.nasa.gov/basics>, 2004
- [4] N.J. Cornish, J. Goodman, The Lagrange Points, <http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf>
- [5] University of St. Andrews, Scotland, History of Mathematics, <http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Indexes/HistoryTopics.html>, 2004
- [6] S.H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus Books, Reading 1994
- [7] W. Nolting, Grundkurs: Theoretische Physik 1 - Klassische Mechanik, Zimmermann-Neufang, Ulmen 1993
- [8] NASA, JPL Missions, <http://www.jpl.nasa.gov/missions>, 2004
- [9] NASA, Solar System Exploration, <http://sse.jpl.nasa.gov/index.cfm>, 2004
- [10] ESA, Science & Technology: Darwin, <http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=28>, 2004
- [11] L5 Society, L5 News, <http://www.l5news.org>, 2004
- [12] Y. Minesaki, Y. Nakamura, A new discretization of the Kepler motion which conserves the Runge-Lenz vector, *Phys. A* **306** 127-133(2002)
- [13] Y. Minesaki, Y. Nakamura, A new conservative numerical integration algorithm for the three-dimensional Kepler motion based on the Kustaanheimo-Stiefel regularization theory, *Phys. A* **324** 282-292(2004)
- [14] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Nauka, Moskau 1979

- [15] C. Baum, C. Ritter, LaTeX für Dummies, mitp, Bonn 2003
- [16] K. Stumpff, Himmelsmechanik, Band II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965
- [17] J.J. Dykla, R. Cacioppo, A. Gangopadhyaya, Gravitational slingshot, Am. J. Phys. **72** 5(2004)
- [18] R.A. Brauenig, Orbital Mechanics,
<http://www.brauenig.us/space/orbmech.htm>, 1997

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Besondere Lernleistung ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Datum

Unterschrift